CAPÍTULO 2

La derivada

2.1 Dos problemas con el mismo tema

Nuestro primer problema es muy antiguo; se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 A. C.). Nos referimos al problema de la *pendiente de la recta tangente*. Nuestro segundo problema es más reciente. Surgió con los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la *velocidad instantánea*.

Los dos problemas, uno geométrico y el otro mecánico, parecen no estar muy relacionados. En este caso, las apariencias engañan. Los dos problemas son gemelos idénticos.

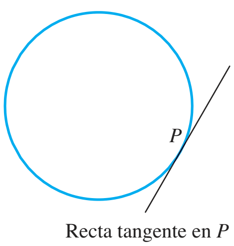


Figura 1

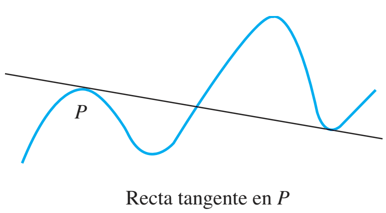


Figura 2

La recta tangente La noción de Euclides de una tangente, como una recta que toca a una curva en un solo punto es totalmente correcta para circunferencias (véase la figura 1); pero completamente insatisfactoria para otras curvas (véase la figura 2). La idea de una tangente, en P a una curva como la recta que mejor se aproxima a la curva cerca de P es bastante mejor, pero aún muy vaga para la precisión matemática. El concepto de límite proporciona una manera de obtener una mejor descripción.

Sea P un punto en una curva y sea Q un *punto móvil* cercano a P en esa curva. Considere la recta que pasa por P y Q, llamada **recta secante.** La **recta tangente** en P es la posición límite (si ésta existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva (véase la figura 3).

Suponga que la curva es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Entonces, P tiene coordenadas $(c, f(c))$, un punto cercano Q tiene coordenadas $(c + h, f(c + h))$, y la recta secante de P y Q tiene pendiente m_{sec} dada por (véase la figura 4):

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

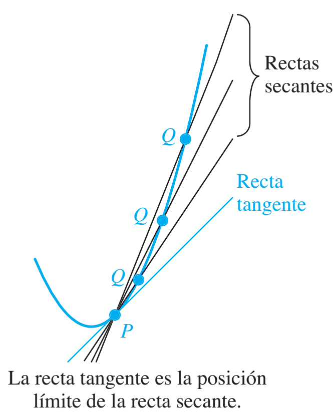


Figura 3

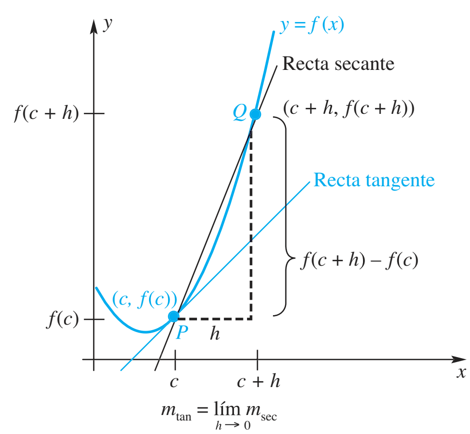


Figura 4

Mediante el concepto de límite, que estudiamos en el capítulo anterior, ahora podemos dar una definición formal de la recta tangente.

Definición Recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

EJEMPLO 1 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

SOLUCIÓN La recta cuya pendiente estamos buscando se muestra en la figura 5. Es claro que tiene una pendiente positiva grande.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

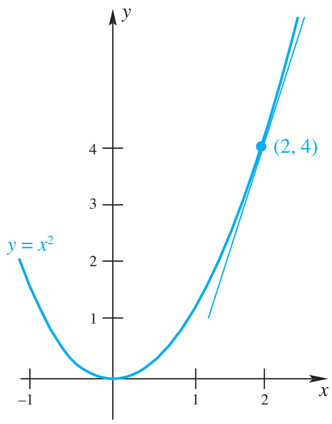


Figura 5

EJEMPLO 2 Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = f(x) = -x^2 + 2x + 2$ en los puntos con abscisas $-1, \frac{1}{2}, 2,$ y 3.

SOLUCIÓN En lugar de realizar cálculos por separado, parece mejor calcular la pendiente en el punto con abscisa c y luego obtener las cuatro respuestas deseadas por medio de sustitución.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2 + 2(c+h) + 2 - (-c^2 + 2c + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-c^2 - 2ch - h^2 + 2c + 2h + 2 + c^2 - 2c - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2c - h + 2)}{\cancel{h}} \\ &= -2c + 2 \end{aligned}$$

Las cuatro pendientes deseadas (obtenidas haciendo $c = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$) son $4, 1, -2,$ y -4. Estas respuestas parecen ser coherentes con la gráfica en la figura 6. ■

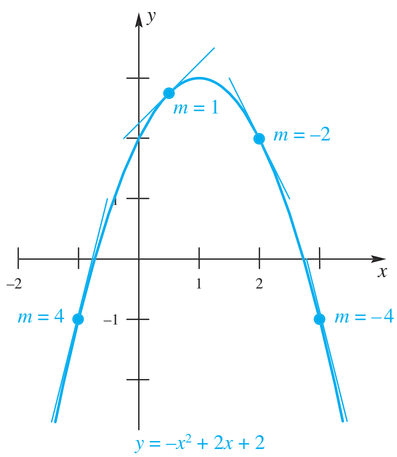


Figura 6

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ (véase la figura 7).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1/x$.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2}{2(2+h)} - \dfrac{2+h}{2(2+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

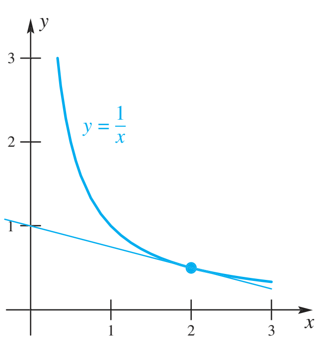


Figura 7

Sabiendo que la pendiente de la recta es $-\frac{1}{4}$ y que el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a ella, con facilidad podemos escribir su ecuación utilizando la forma punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$. El resultado es $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$, de forma equivalente $y = 1 - \frac{1}{4}x$. ■

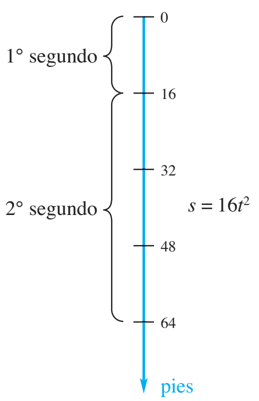


Figura 8

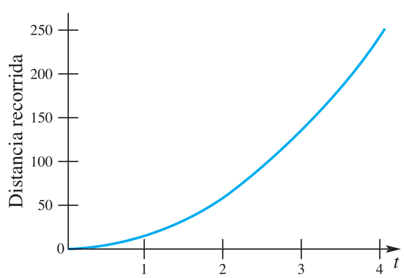


Figura 9

Velocidad promedio y velocidad instantánea Si en 2 horas conducimos un automóvil de una ciudad a otra que está a 80 millas, nuestra velocidad promedio es de 40 millas por hora. La *velocidad promedio* es la distancia de la primera posición a la segunda, dividida entre el tiempo empleado.

Pero durante el viaje la lectura del velocímetro con frecuencia fue diferente de 40. Al principio, registró 0; a veces subió hasta 57; al final, regresó a 0. ¿Qué mide el velocímetro? Ciertamente, no indica una velocidad promedio.

Considere el ejemplo más preciso de un objeto P que cae en el vacío. El experimento muestra que si inicia desde el reposo, P cae $16t^2$ pies en t segundos. Por lo tanto, cae 16 pies en el primer segundo y 64 pies durante los primeros dos segundos (véase la figura 8); claramente, desciende cada vez más rápido conforme el tiempo avanza. La figura 9 muestra la distancia recorrida (en el eje vertical) como una función del tiempo (en el eje horizontal).

Durante el segundo segundo (es decir, en el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 2$), P cayó $64 - 16 = 48$ pies. Su velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 \text{ pies por segundo}$$

Durante el intervalo de $t = 1$ a $t = 1.5$, cayó $16(1.5)^2 - 16 = 20$ pies. Su velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.5)^2 - 16}{1.5 - 1} = \frac{20}{0.5} = 40 \text{ pies por segundo}$$

De manera similar, en los intervalos de tiempo $t = 1$ a $t = 1.1$ y $t = 1$ a $t = 1.01$, calculamos las velocidades promedio respectivas

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.1)^2 - 16}{1.1 - 1} = \frac{3.36}{0.1} = 33.6 \text{ pies por segundo}$$

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.01)^2 - 16}{1.01 - 1} = \frac{0.3216}{0.01} = 32.16 \text{ pies por segundo}$$

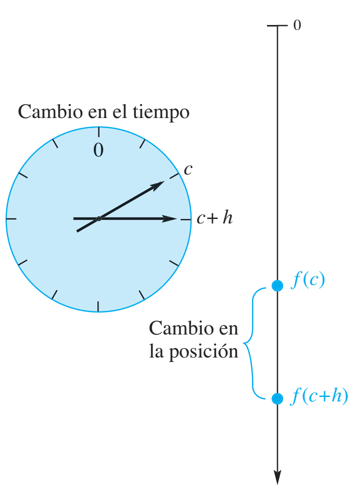


Figura 10

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños; cada uno comienza en $t = 1$. Entre más breve sea el intervalo de tiempo, mejor aproximamos la *velocidad instantánea* en el instante $t = 1$. Al mirar los números 48, 40, 33.6 y 32.16 podríamos suponer que 32 pies por segundo es la velocidad instantánea.

Pero seamos más precisos. Suponga que un objeto P se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición en el instante t está dada por $s = f(t)$. En el instante c el objeto está en $f(c)$; en un instante cercano, $c + h$, está en $f(c + h)$ (véase la figura 10). Así, la **velocidad promedio** en este intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Ahora podemos definir la velocidad instantánea.

Definición Velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$, entonces su **velocidad instantánea** en el instante c es

$$v = \lim_{h \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

En el caso donde $f(t) = 16t^2$, la velocidad instantánea en $t = 1$ es

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16 + 32h + 16h^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (32 + 16h) = 32 \end{aligned}$$

Esto confirma nuestra suposición previa.

Dos problemas con el mismo tema

Ahora puede ver por qué llamamos a esta sección "dos problemas con el mismo tema". Véanse las definiciones de *pendiente de la recta tangente* y de *velocidad instantánea*. Éstas dan nombres diferentes para el mismo concepto matemático.

EJEMPLO 4 Un objeto, inicialmente en reposo, cae debido a la acción de la gravedad. Determine su velocidad instantánea en $t = 3.8$ segundos y en $t = 5.4$ segundos.

SOLUCIÓN Calculamos la velocidad instantánea en $t = c$ segundos. Como $f(t) = 16t^2$,

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16c^2 + 32ch + 16h^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (32c + 16h) = 32c \end{aligned}$$

Así, la velocidad instantánea en 3.8 segundos es $32(3.8) = 121.6$ pies por segundo; en 5.4 segundos es $32(5.4) = 172.8$ pies por segundo. ■

EJEMPLO 5 ¿Cuánto tiempo tardará, el objeto del ejemplo 4 para alcanzar una velocidad instantánea de 112 pies por segundo?

SOLUCIÓN Aprendimos en el ejemplo 4 que la velocidad instantánea después de c segundos es $32c$. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación $32c = 112$. La solución es $c = \frac{112}{32} = 3.5$ segundos. ■

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado y s, su distancia dirigida en centímetros, medida desde el origen al final de t segundos está dada por $s = f(t) = \sqrt{5t + 1}$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula al final de 3 segundos.

SOLUCIÓN La figura 11 muestra la distancia recorrida como función del tiempo. La velocidad instantánea en el instante $t = 3$ es igual a la pendiente de la recta tangente en $t = 3$.

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(3+h)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h} \end{aligned}$$

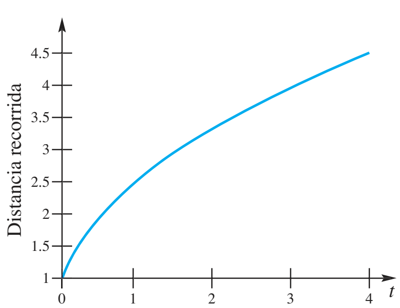


Figura 11

Para evaluar este límite, racionalizamos el numerador multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{16 + 5h} + 4$. Obtenemos

$$v = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{16+5h}-4}{h}\cdot\frac{\sqrt{16+5h}+4}{\sqrt{16+5h}+4}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{16+5h-16}{h\left(\sqrt{16+5h}+4\right)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{16+5h}+4} = \frac{5}{8}$$

Concluimos que la velocidad instantánea al final de 3 segundos es de $\frac{5}{8}$ de centímetro por segundo. ■

Velocidad o rapidez

Por el momento, usaremos los términos *velocidad* y *rapidez* de manera indistinta. Posteriormente, en este capítulo, haremos una distinción entre estas dos palabras.

Tasa de cambio La velocidad es sólo una de las muchas tasas de cambio que serán importantes en este curso; es la tasa de cambio de la distancia con respecto al tiempo. Otras tasas de cambio que nos interesarán son la densidad de un alambre (la tasa de cambio de la masa con respecto a la distancia); el ingreso marginal (la tasa de cambio del ingreso con respecto al número de artículos producidos), y la corriente (la tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo). Estas tasas y muchas más se estudian en el conjunto de problemas. En cada caso debemos distinguir entre una tasa de cambio *promedio* en un intervalo y una tasa de cambio *instantánea* en un punto. La frase *tasa de cambio* sin un adjetivo significará tasa de cambio instantánea.

Revisión de conceptos

1. La recta que más se aproxima a una curva cerca del punto P es la _____ que pasa por ese punto.

2. Con mayor precisión, la recta tangente a una curva en P es la posición límite de las rectas _____ que pasan por P y Q cuando Q a se aproxima a P lo largo de la curva.

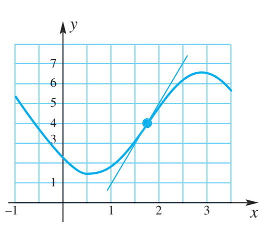
3. La pendiente $m_{\tan}$ de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(c, f(c))$ está dada por $m_{\tan} = \lim_{h\to 0}$ _____.

4. La velocidad instantánea de un punto P (que se mueve a lo largo de una recta) en el instante c es el límite de _____ en el intervalo de c a $c + h$ cuando h se aproxima a cero.

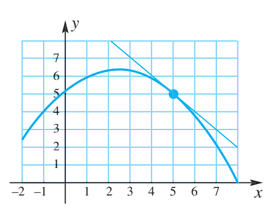
Conjunto de problemas 2.1

En los problemas 1 y 2 está dibujada una recta tangente a una curva. Evalúe su pendiente $(\text{pendiente} = \text{elevación}/\text{avance})$. Sea cuidadoso al observar la diferencia en escalas sobre los dos ejes.

1.

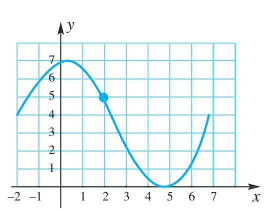


2.

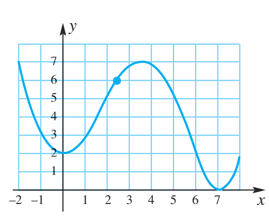


En los problemas 3–6, dibuje la recta tangente a la curva que pasa por el punto indicado y estime su pendiente.

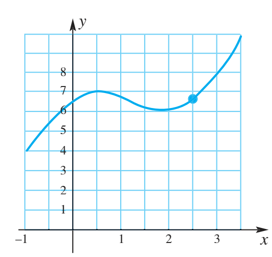
3.



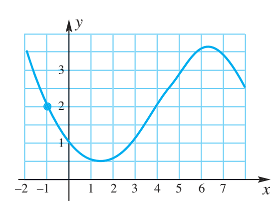
4.



5.



6.



7. Considere $y = x^2 + 1$.

(a) Haga un bosquejo de su gráfica tan cuidadosamente como pueda.

(b) Dibuje la recta tangente en $(1, 2)$.

≈ (c) Estime la pendiente de esta recta tangente.

C (d) Calcule la pendiente de la recta tangente que pasa por $(1, 2)$ y $(1.01, (1.01)^2 + 1.0)$.

(e) Encuentre, por medio del proceso de límite (véase el ejemplo 1), la pendiente de la recta tangente en $(1, 2)$.

8. Considere $y = x^3 - 1$.

(a) Haga un bosquejo de su gráfica tan cuidadosamente como pueda.

(b) Dibuje la recta tangente en $(2, 7)$.

(c) Estime la pendiente de esta recta tangente.

(d) Calcule la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, 7)$ y $(2.01, (2.01)^3 - 1.0)$.

(e) Encuentre, por medio del proceso de límite (véase el ejemplo 1), la pendiente de la recta tangente en $(2, 7)$.

9. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 1$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$ (véase el ejemplo 2).

10. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

11. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = 1/(x + 1)$ y luego encuentre la ecuación de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3).

12. Encuentre una ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x - 1)$ en $(0, -1)$.

13. Un experimento sugiere que un cuerpo que cae descenderá aproximadamente $16t^2$ pies en t segundos.

(a) ¿Cuánto caerá entre $t = 0$ y $t = 1$?

(b) ¿Cuánto caerá entre $t = 1$ y $t = 2$?

(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 3$?

(d) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $3 \le t \le 3.01$?

(e) Encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$ (véase el ejemplo 4).

14. Un objeto viaja a lo largo de una recta de modo que su posición s es $s = t^2 + 1$ metros después de t segundos.

(a) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 3$?

(b) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 2.003$?

(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 2 + h$?

(d) Determine su velocidad instantánea en $t = 2$.

15. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $\sqrt{2t + 1}$ pies.

(a) Encuentre su velocidad instantánea en $t = \alpha, \alpha > 0$.

(b) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ pie por segundo? (Véase el ejemplo 5).

16. Si una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $(-t^2 + 4t)$ pies, ¿cuándo la partícula está momentáneamente detenida? (Es decir, ¿en qué momento su velocidad instantánea es cero?).

17. Cierto cultivo de bacteria crece de modo que tiene una masa de $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gramos después de t horas.

(a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $2 \le t \le 2.01$?

(b) ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento durante el intervalo $2 \le t \le 2.01$?

(c) ¿Cuál fue su tasa instantánea de crecimiento en $t = 2$?

18. Un negocio está prosperando de tal manera que su ganancia total (acumulada) después de t años es $1000t^2$ dólares.

(a) ¿Cuál fue su ganancia durante el tercer año (entre $t = 2$ y $t = 3$)?

(b) ¿Cuál fue su tasa promedio de ganancia durante la primera mitad del tercer año, entre $t = 2$ y $t = 2.5$? (La tasa será en dólares por año).

(c) ¿Cuál fue la tasa instantánea de ganancia en $t = 2$?

19. Un alambre de 8 centímetros de largo es tal que la masa entre su extremo izquierdo y un punto x centímetros a la derecha es de x^3 gramos (véase la figura 12).

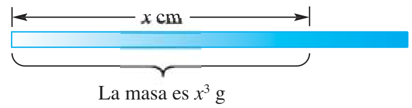


Figura 12

(a) ¿Cuál es la densidad promedio de los dos centímetros centrales, es decir, del centímetro 3 al 5 de este alambre? *Observación*: la densidad promedio es igual a masa/longitud.

(b) ¿Cuál es la densidad real en el punto que se encuentra a 3 centímetros del extremo izquierdo?

20. Suponga que el ingreso $I(n)$ en dólares por producir n computadoras está dado por $I(n) = 0.4n - 0.001n^2$. Encuentre las tasas instantáneas de cambio del ingreso cuando $n = 10$ y $n = 100$. (La tasa instantánea de cambio del ingreso con respecto a la cantidad de producto fabricado se denomina *ingreso marginal*.)

21. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama **aceleración.** Suponga que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. Encuentre la aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundo.

22. Una ciudad es azotada por una epidemia de gripe asiática. Las autoridades estiman que t días después del inicio de la epidemia, el número de personas enfermas con la gripe está dado por $p(t) = 120t^2 - 2t^3$, cuando $0 \le t \le 40$. ¿A qué tasa se expande la gripe en el instante $t = 10$; $t = 20$; $t = 40$?

23. La gráfica de la figura 13 muestra la cantidad de agua en un tanque de la ciudad durante un día que no se bombeó el vital líquido a ese recipiente. ¿Cuál fue la tasa promedio de uso de agua durante el día? ¿Qué tan rápido estaba siendo usada el agua a las 8 A.M.?

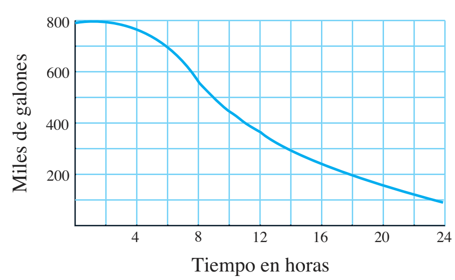


Figura 13

24. Unos pasajeros abordan un elevador en la planta baja (es decir, el piso cero) y lo dejan en el séptimo piso, que se encuentra 84 pies por arriba de la planta baja. La posición del elevador, s como función del tiempo t (medido en segundos), se muestra en la figura 14.

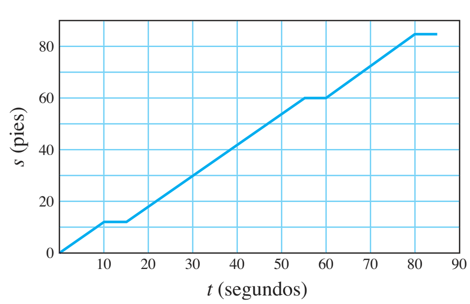


Figura 14

(a) ¿Cuál fue la velocidad promedio del elevador desde el instante que inició a moverse hasta que llegó al séptimo piso?

(b) Aproximadamente, ¿cuál fue la velocidad promedio del elevador en el instante $t = 20$?

(c) ¿Cuántas paradas hizo el elevador entre la planta baja y el séptimo piso (exceptuando la planta baja y el séptimo piso)? ¿En qué pisos cree usted que el elevador se detuvo?

25. La figura 15 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri, como una función del tiempo (medido en días desde el 1 de enero).

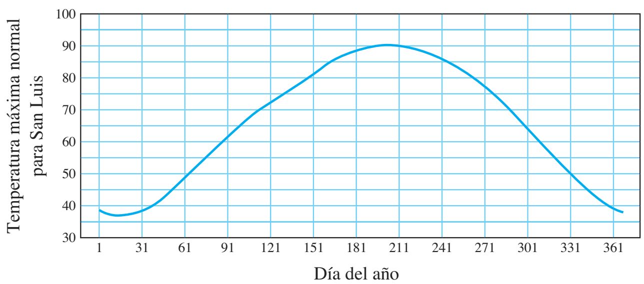


Figura 15

(a) En forma aproximada, ¿cuál es la tasa de cambio de la temperatura máxima normal el 2 de marzo (es decir, en el día número 61)? ¿Cuáles son las unidades de esta tasa de cambio?

(b) Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio en la temperatura máxima normal el 10 de julio (es decir, en el día 191)?

(c) ¿En cuáles meses hay un momento en que la tasa de cambio es igual a cero?

(d) ¿En qué meses el valor absoluto de la tasa de cambio es la máxima?

26. La figura 16 muestra la población, en millones, de un país en desarrollo para los años de 1900 a 1999. Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio de la población en 1930? ¿Y en 1990? Con frecuencia, el crecimiento porcentual es una medida más apropiada del crecimiento poblacional. Ésta es la tasa de crecimiento dividida entre el tamaño de la población en ese instante. Para esta población, ¿cuál fue el crecimiento porcentual aproximado en 1930? ¿Y en 1990?

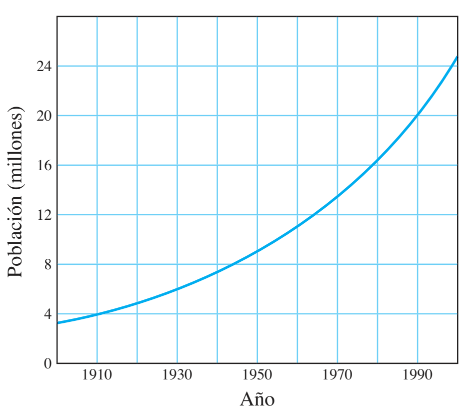


Figura 16

27. Las figuras 17a y 17b muestran la posición s como una función del tiempo t para dos partículas que se mueven a lo largo de una recta. Para cada partícula, ¿la velocidad aumenta o disminuye? Explique.

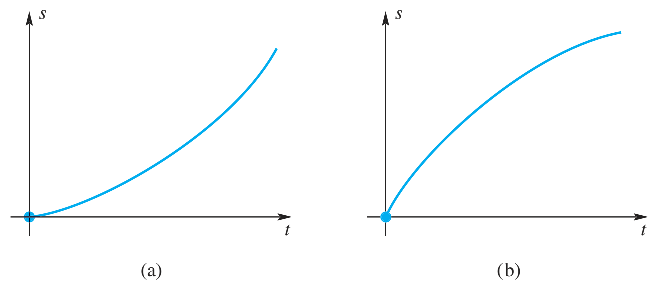


Figura 17

28. La tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo se denomina **corriente.** Suponga que $\frac{1}{3}t^3 + t$ coulombs de carga fluye a través de una alambre en t segundos. Encuentre la corriente, en amperes (coulombs por segundo) después de 3 segundos. ¿Cuándo se fundirá un fusible de 20 amperes en la línea?

29. Debido a un derrame, el radio de una mancha circular de aceite está creciendo a una velocidad constante de 2 kilómetros por día. ¿A qué velocidad está creciendo el área del derrame 3 días después de que comenzó?

30. El radio de un balón esférico está aumentando a una velocidad de 0.25 pulgadas por segundo. Si el radio es de 0 en el instante $t = 0$, encuentre la tasa de cambio del volumen en el instante $t = 3$.

GC *Utilice una calculadora gráfica (GC) o un* CAS *(sistema de álgebra computacional) para resolver los problemas del 31 al 34.*

31. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 3.2

32. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 2x$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) $\pi/3$ (b) 2.8 (c) π (d) 4.2

33. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en pies) desde 0 está dada por $s = t + t\cos^2 t$ a los t segundos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$.

34. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en metros) desde 0 está dada por $s = (t + 1)^3/(t + 2)$ a los t minutos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 1.6$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** recta tangente **2.** secante **3.** $[f(c + h) - f(c)]/h$ **4.** velocidad promedio

2.2 La derivada

Hemos visto que la *pendiente de la recta tangente* y la *velocidad instantánea* son manifestaciones de la misma idea básica. Tasa de crecimiento de un organismo (biología), ganancia marginal (economía), densidad de un alambre (física) y velocidad de disolución (química) son otras versiones del mismo concepto básico. El buen sentido matemático sugiere que estudiemos este concepto independientemente de estos vocabularios especializados y de sus diversas aplicaciones. Elegimos el nombre neutral de *derivada*, el cual añadiremos a *función* y *límite* como una de las palabras clave del cálculo.

Definición Derivada

La **derivada** de una función f es otra función f' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que f es **derivable** en x. Determinar una derivada recibe el nombre de **derivación**; la parte del cálculo asociada con la derivada se denomina **cálculo diferencial.**

Cálculo de derivadas

Ilustramos con varios ejemplos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 13x - 6$. Encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

■

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^3 + 7x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^3 + 7(x+h)\right] - \left[x^3 + 7x\right]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7) \\ &= 3x^2 + 7 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 1/x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Así, f' es la función dada por $f'(x) = -1/x^2$. Su dominio es todos los números reales, excepto $x = 0$. ■

EJEMPLO 4 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

SOLUCIÓN

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

En este momento habrá notado que encontrar una derivada siempre implica tomar el límite de un cociente, en donde el numerador y el denominador se aproximan a cero. Nuestra tarea es simplificar este cociente, de modo que podamos cancelar un factor h, del numerador y del denominador, permitiéndonos con ello evaluar el límite por sustitución. En el ejemplo actual, esto puede realizarse por medio de la racionalización del numerador.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Así, F', la derivada de F, está dada por $F'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. Su dominio es $(0, \infty)$. ■

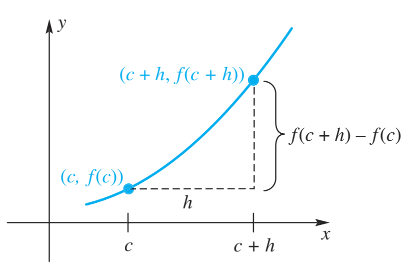


Figura 1

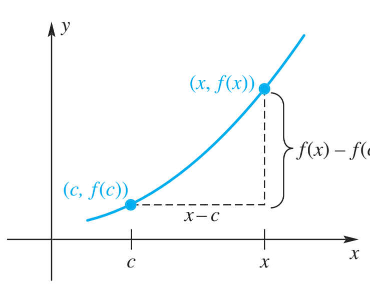


Figura 2

Formas equivalentes de la derivada No hay nada sagrado acerca del uso de la letra h en la definición de $f'(c)$. Por ejemplo, observe que

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s}$$

Un cambio más radical, pero todavía sólo un cambio de notación, puede entenderse comparando las figuras 1 y 2. Observe cómo x toma el lugar de $c + h$, y por lo tanto $x - c$ reemplaza a h. En consecuencia,

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

Obsérvese que en todos los casos el número en el que f' se evalúa se mantiene fijo durante la operación del límite.

EJEMPLO 5 Utilice el último recuadro para determinar $g'(c)$ si $g(x) = 2/(x + 3)$.

SOLUCIÓN

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{2}{c+3}}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x - c} \right]$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x - c} \right]$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}$$

Aquí hemos manipulado el cociente hasta que pudimos cancelar el factor $x - c$ del numerador y del denominador. Entonces pudimos evaluar el límite. ■

EJEMPLO 6 Cada una de las siguientes es una derivada, pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto?

(a) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$ (b) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{3}}{x - 3}$

SOLUCIÓN

(a) Ésta es la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 4$.

(b) Ésta es la derivada de $f(x) = 2/x$ en $x = 3$. ■

Derivabilidad implica continuidad Si una curva tiene una recta tangente en un punto, entonces esa curva no puede dar un salto ni oscilar demasiado en ese punto. La formulación precisa de este hecho es un teorema importante.

Teorema A Derivabilidad implica continuidad

Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

Demostración Necesitamos demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Empezamos por escribir $f(x)$ de una manera especial.

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \qquad x \neq c$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right]$$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$

$$= f(c)$$ ■

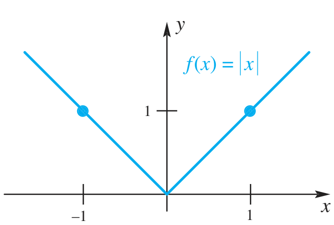


Figura 3

El inverso de este teorema es falso. Si una función f es continua en c, no se sigue que f tenga una derivada en c. Esto es fácil de ver considerando $f(x) = |x|$ en el origen (véase la figura 3). Esta función en verdad es continua en cero. Sin embargo, no tiene una derivada allí, como ahora lo demostramos. Observe que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}$$

Así,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

mientras que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Ya que los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

no existe. Por lo tanto, $f'(0)$ no existe.

Un argumento similar muestra que cualquier punto en donde la gráfica de una función continua tenga una esquina o vértice, la función no es derivable. La gráfica en la figura 4 indica algunas formas para que una función no sea derivable en un punto.

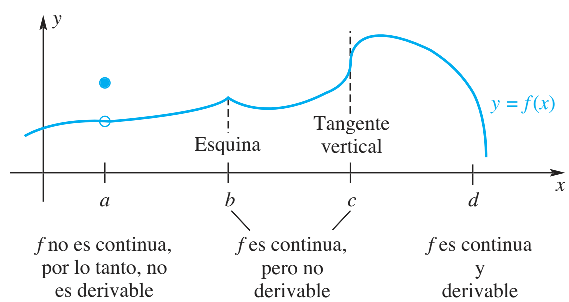


Figura 4

Para la función que se muestra en la figura 4 la derivada no existe en el punto c, en donde la recta tangente es vertical. Esto es porque

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\infty$$

Esto corresponde al hecho de que la pendiente de una recta vertical no está definida.

Incrementos Si el valor de una variable x cambia de x_1 a x_2, entonces $x_2 - x_1$, el cambio de x, se denomina un **incremento** de x y por lo regular se denota por Δx (léase "delta x"). Obsérvese que Δx *no* significa Δ por x. Si $x_1 = 4.1$ y $x_2 = 5.7$, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5.7 - 4.1 = 1.6$$

Si $x_1 = c$ y $x_2 = c + h$, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1 = c + h - c = h$$

Ahora suponga que $y = f(x)$ determina una función. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces y cambia de $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. Así, al incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ en x, existe un correspondiente incremento en y dado por

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

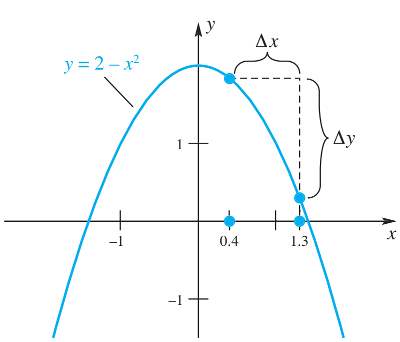


Figura 5

EJEMPLO 7 Sea $y = f(x) = 2 - x^2$. Encuentre Δy cuando x cambia de 0.4 a 1.3 (véase la figura 5).

SOLUCIÓN

$$\Delta y = f(1.3) - f(0.4) = \left[2 - (1.3)^2\right] - \left[2 - (0.4)^2\right] = -1.53 \quad \blacksquare$$

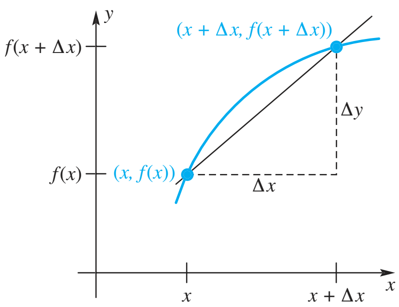


Figura 6

Notación de Leibniz para la derivada Ahora, suponga que la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$. El cambio correspondiente en la variable dependiente, y, será

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de una recta secante que pasa por $(x, f(x))$, como se muestra en la figura 6. Cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de esta recta secante tiende a la recta tangente, y para esta última pendiente utilizamos el símbolo dy/dx. Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz, contemporáneo de Isaac Newton, llamó a dy/dx cociente de dos infinitesimales. El significado de la palabra *infinitesimal* es vago y no lo utilizaremos. Sin embargo, dy/dx es un símbolo estándar para la derivada y lo usaremos con frecuencia de ahora en adelante.

La gráfica de la derivada La derivada $f'(x)$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el valor de x. Por lo tanto, cuando la recta tangente está ascendiendo hacia la derecha, la derivada es positiva, y cuando la recta tangente está descendiendo hacia la derecha, la derivada es negativa. Por lo tanto, podemos obtener una gráfica aproximada de la derivada dando solo la gráfica de la función.

EJEMPLO 8 Dada la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra en la primera parte de la figura 7, haga un bosquejo de la gráfica de la derivada $f'(x)$.

SOLUCIÓN Para $x < 0$, la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ tiene pendiente positiva. Un cálculo aproximado a partir de la gráfica sugiere que cuando $x = -2$, la pendiente es alrededor de 3. Conforme nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la curva en la figura 7, vemos que la pendiente sigue siendo positiva (durante un tiempo), pero las rectas tangentes se hacen cada vez más planas (horizontales). Cuando $x = 0$, la recta tangente es horizontal y nos dice que $f'(0) = 0$. Para x entre 0 y 2, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, lo cual indica que la derivada será negativa en este intervalo. Cuando $x = 2$, nuevamente estamos en un punto en donde la recta tangente es horizontal, por lo que la derivada es igual a cero cuando $x = 2$. Para $x > 2$, la recta tangente tiene pendiente positiva otra vez. La gráfica de la derivada $f'(x)$ se muestra en la última parte de la figura 7. ■

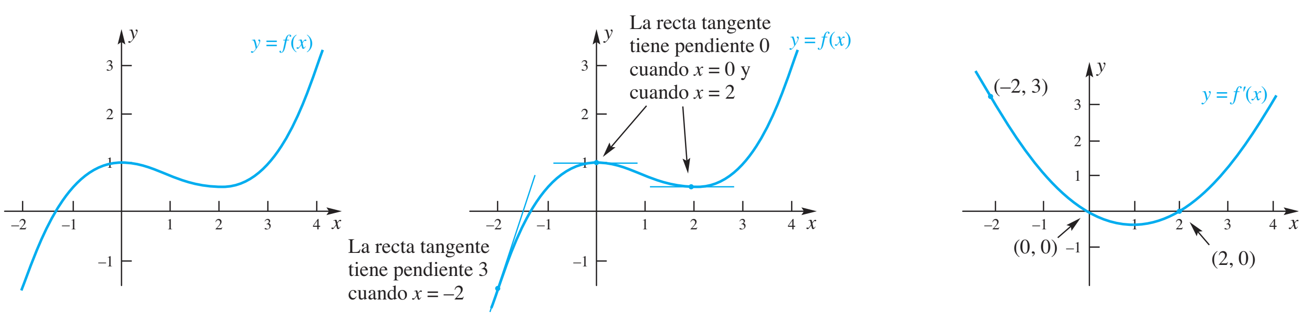


Figura 7

Revisión de conceptos

1. La derivada f en x está dada por $f'(x) = \lim_{h \to 0}$ _____. De forma equivalente, $f'(x) = \lim_{t \to x}$ _____.

2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es _____.

3. Si f es derivable en c, entonces f es _____ en c. El inverso es falso, como se demostró mediante el ejemplo $f(x) =$ _____.

4. Si $y = f(x)$, ahora tenemos dos símbolos diferentes para la derivada de y con respecto a x. Son _____ y _____.

Conjunto de problemas 2.2

En los problemas del 1–4, utilice la definición

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

para encontrar la derivada indicada.

1. $f'(1)$ si $f(x) = x^2$ **2.** $f'(2)$ si $f(t) = (2t)^2$

3. $f'(3)$ si $f(t) = t^2 - t$ **4.** $f'(4)$ si $f(s) = \dfrac{1}{s-1}$

En los problemas del 5–22, use $f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h$ *para determinar la derivada en x.*

5. $s(x) = 2x + 1$ **6.** $f(x) = \alpha x + \beta$

7. $r(x) = 3x^2 + 4$ **8.** $f(x) = x^2 + x + 1$

9. $f(x) = ax^2 + bx + c$ **10.** $f(x) = x^4$

11. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ **12.** $g(x) = x^4 + x^2$

13. $h(x) = \dfrac{2}{x}$ **14.** $S(x) = \dfrac{1}{x+1}$

15. $F(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$ **16.** $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

17. $G(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$ **18.** $G(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x}$

19. $g(x) = \sqrt{3x}$ **20.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$

21. $H(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$ **22.** $H(x) = \sqrt{x^2+4}$

En los problemas del 23–26, use $f'(x) = \lim_{t \to x} [f(t) - f(x)]/[t - x]$ *para determinar* $f'(x)$ *(véase el ejemplo 5).*

23. $f(x) = x^2 - 3x$ **24.** $f(x) = x^3 + 5x$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$ **26.** $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

En los problemas del 27 al 36 el límite dado es una derivada, pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto? (Véase el ejemplo 6).

27. $\lim_{h \to 0} \dfrac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$

28. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$

29. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **30.** $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 + x - 30}{x - 3}$

31. $\lim_{t \to x} \dfrac{t^2 - x^2}{t - x}$ **32.** $\lim_{p \to x} \dfrac{p^3 - x^3}{p - x}$

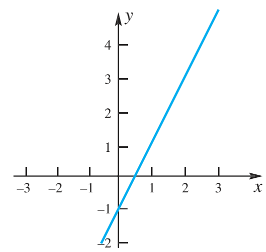
33. $\lim_{x \to t} \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{2}{t}}{x - t}$ **34.** $\lim_{x \to y} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y}$

35. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ **36.** $\lim_{h \to 0} \dfrac{\tan(t+h) - \tan t}{h}$

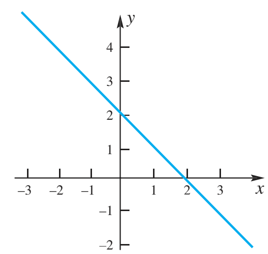
En los problemas del 37 al 44 se da la gráfica de una función $y = f(x)$

Utilice esta gráfica para bosquejar la gráfica de $y = f'(x)$.

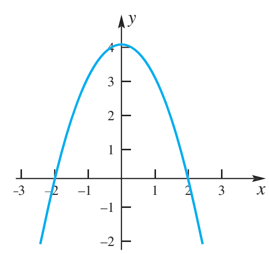
37.



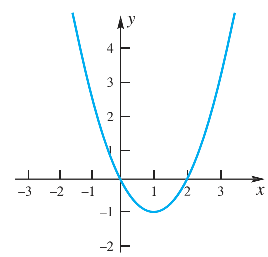
38.



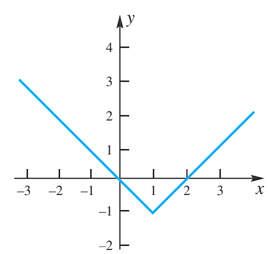
39.



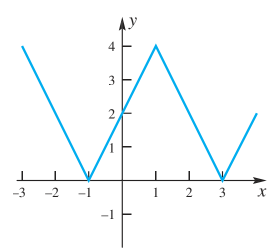
40.



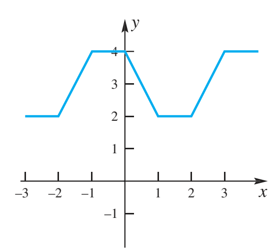
41.



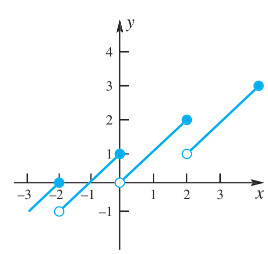
42.



43.



44.



En los problemas del 45 al 50 determine Δy *para los valores dados de* x_1 *y* x_2 *(véase el ejemplo 7).*

45. $y = 3x + 2, x_1 = 1, x_2 = 1.5$

46. $y = 3x^2 + 2x + 1, x_1 = 0.0, x_2 = 0.1$

47. $y = \dfrac{1}{x}, x_1 = 1.0, x_2 = 1.2$

48. $y = \dfrac{2}{x+1}, x_1 = 0, x_2 = 0.1$

C **49.** $y = \dfrac{3}{x+1}, x_1 = 2.34, x_2 = 2.31$

C **50.** $y = \cos 2x, x_1 = 0.571, x_2 = 0.573$

En los problemas del 51 al 56 primero determine y simplifique

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Luego determine dy/dx tomando el límite de su respuesta cuando $\Delta x \to 0$.

51. $y = x^2$

52. $y = x^3 - 3x^2$

53. $y = \dfrac{1}{x+1}$

54. $y = 1 + \dfrac{1}{x}$

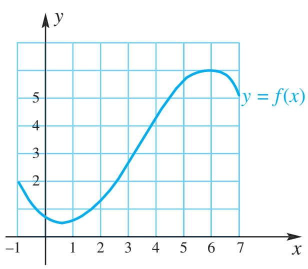


Figura 8

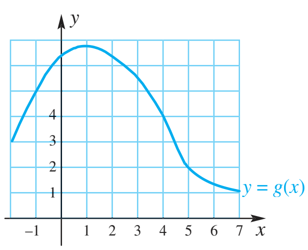


Figura 9

55. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

56. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

57. Con base en la figura 8, estime $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(5)$, y $f'(7)$.

58. Con base en la figura 9, estime $g'(-1)$, $g'(1)$, $g'(4)$, y $g'(6)$.

59. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = f'(x)$ en $-1 < x < 7$ para la función f de la figura 8.

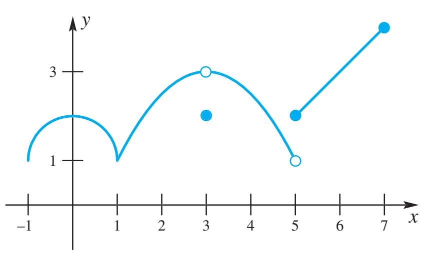


Figura 10

60. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = g'(x)$ en $-1 < x < 7$ para la función g de la figura 9.

61. Considere la función $y = f(x)$, cuya gráfica está bosquejada en la figura 10.

(a) Estime $f(2)$, $f'(2)$, $f(0.5)$, y $f'(0.5)$.

(b) Estime la tasa de cambio promedio en f sobre el intervalo $0.5 \le x \le 2.5$.

(c) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $\lim_{u \to x} f(u)$ no existe?

(d) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde f no es continua?

(e) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde f no tiene derivada?

(f) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $f'(x) = 0$?

(g) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $f'(x) = 1$?

62. La figura 14 en la sección 2.1 muestra la posición s de un elevador como función del tiempo t. ¿En qué puntos la derivada existe? Bosqueje la derivada de s.

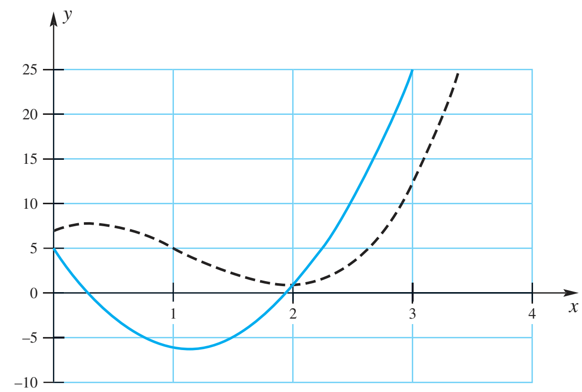


Figura 11

63. La figura 15 en la sección 2.1 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri. Haga un bosquejo de la derivada.

64. La figura 11 muestra dos funciones. Una es la función f, y la otra es su derivada f'. ¿Cuál es cuál?

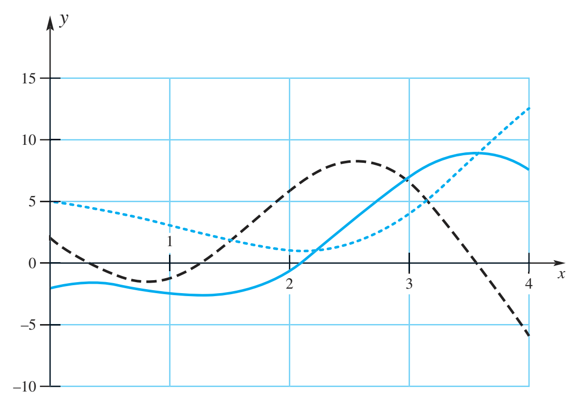


Figura 12

65. La figura 12 muestra tres funciones. Una es la función f; otra es su derivada f', a la cual llamaremos g; y la tercera es la derivada de g. ¿Cuál es cuál?

EXPL **66.** Suponga que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para toda x y toda y. Muestre que si $f'(0)$ existe, entonces $f'(a)$ existe y $f'(a) = f(a)f'(0)$.

67. Sea $f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Determine m y b de modo que f sea diferenciable en todas partes.

EXPL **68.** La **derivada simétrica** $f_s(x)$ se define como

$$f_s(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

(b) f es una función par.

70. Demuestre que la derivada de una función impar es una función par y que la derivada de una función par es una función impar.

CAS *Utilice un* CAS *para resolver los problemas 71 y 72.*

EXPL **71.** Dibuje las gráficas de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ y su derivada $f'(x)$ en el intervalo $[-2, 5]$ utilizando los mismo ejes.

(a) En este intervalo, ¿en dónde está $f'(x) < 0$?

(b) En este intervalo, ¿en dónde $f(x)$ disminuye cuando x aumenta?

(c) Haga una conjetura. Experimente con otros intervalos y otras funciones para sustentar esta conjetura.

EXPL **72.** Dibuje las gráficas de $f(x) = \cos x - \operatorname{sen}(x/2)$ y su derivada $f'(x)$ en el intervalo $[0, 9]$ utilizando los mismos ejes.

(a) En este intervalo, ¿en dónde $f'(x) > 0$?

(b) En este intervalo, ¿en dónde $f(x)$ aumenta cuando x aumenta?

(c) Haga una conjetura. Experimente con otros intervalos y otras funciones para sustentar esta conjetura.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $[f(x + h) - f(x)]/h$; $[f(t) - f(x)]/(t - x)$ **2.** $f'(c)$ **3.** continua; $|x|$ **4.** $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$

2.3 Reglas para encontrar derivadas

El proceso de encontrar la derivada de una función de manera directa a partir de la definición de la derivada, esto es, estableciendo el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y evaluando su límite, puede consumir tiempo y ser tedioso. Vamos a desarrollar herramientas que nos permitan acortar este largo proceso —de hecho, nos permitirá encontrar derivadas de las funciones más complicadas que se vean.

Recuerde que la derivada de una función f es otra función f'. En la sección anterior vimos que si $f(x) = x^3 + 7x$ es la fórmula para f, entonces $f'(x) = 3x^2 = 7$ es la fórmula para f'. Cuando tomamos la derivada de f, decimos que estamos derivando a f. La derivada *opera* sobre f para producir f'. Con frecuencia utilizamos el símbolo D_x para indicar la operación de derivación (véase la figura 1). El símbolo D_x indica que estamos tomando la derivada (con respecto a la variable x) de lo que sigue. Así, escribimos $D_x f(x) = f'(x)$ o (en el caso antes mencionado) $D_x(x^3 + 7x) = 3x^2 + 7$. Esta D_x es un ejemplo de un **operador.** Como sugiere la figura 1, un operador es una función cuya entrada es una función y cuya salida es otra función.

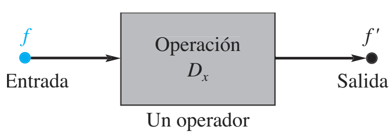


Figura 1

Con la notación de Leibniz, que se introdujo en la sección pasada, ahora tenemos tres notaciones para la derivada. Si $y = f(x)$, podemos denotar la derivada de f por medio de

$$f'(x) \quad \text{o} \quad D_x f(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}$$

Ahora utilizaremos la notación $\dfrac{d}{dx}$ para querer decir lo mismo que el operador D_x.

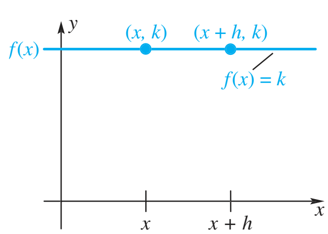


Figura 2

Las reglas para la constante y la potencia La gráfica de la función constante $f(x) = k$ es una recta horizontal (véase la figura 2), que, por lo tanto, tiene pendiente cero en todas partes. Ésta es una manera de entender nuestro primer teorema.

Teorema A **Regla para la función constante**

Si $f(x) = k$, donde k es una constante, entonces para cualquier x, $f'(x) = 0$; esto es,

$$D_x(k) = 0$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

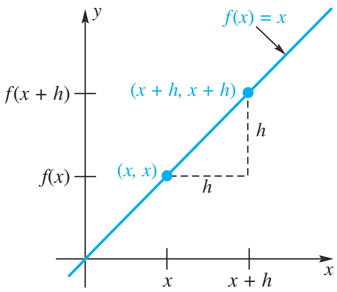


Figura 3

La gráfica de $f(x) = x$ es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1 (véase la figura 3); de modo que debemos esperar que la derivada de esta función sea 1 para toda x.

Teorema B Regla para la función identidad

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$; esto es,

$$D_x(x) = 1$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1 \qquad \blacksquare$$

Antes de iniciar con nuestro siguiente teorema, recordemos algo de álgebra; cómo elevar un binomio a una potencia.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\vdots$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Teorema C Regla para la potencia

Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$; esto es,

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

Dentro de los corchetes, todos los términos —excepto el primero— tienen a h como factor, y así que para todo valor de x cada uno de estos términos tiene límite cero cuando h se aproxima a cero. Por lo tanto,

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \blacksquare$$

Como ejemplos del teorema C, observe que

$$D_x(x^3) = 3x^2 \qquad D_x(x^9) = 9x^8 \qquad D_x(x^{100}) = 100x^{99}$$

D_x es un operador lineal El operador D_x se comporta muy bien cuando se aplica a múltiplos constantes de funciones o sumas de funciones.

Teorema D Regla del múltiplo constante

Si k es una constante f es una función derivable, entonces $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; esto es,

$$D_x\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot D_x f(x)$$

En palabras, *una constante k, que multiplica, puede "sacarse" del operador D_x.*

Demostración Sea $F(x) = k \cdot f(x)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= k \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

El penúltimo paso fue fundamental. Pudimos pasar k a través del signo de límite a consecuencia del teorema principal de límites parte 3. ■

Ejemplos que ilustran este resultado son

$$D_x(-7x^3) = -7D_x(x^3) = -7 \cdot 3x^2 = -21x^2$$

y

$$D_x\left(\tfrac{4}{3}x^9\right) = \tfrac{4}{3}D_x(x^9) = \tfrac{4}{3} \cdot 9x^8 = 12x^8$$

Teorema E Regla para la suma

Si f y g son funciones derivables, entonces $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; esto es,

$$D_x\left[f(x) + g(x)\right] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

En palabras, *la derivada de una suma es la suma de las derivadas*.

Demostración Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[f(x+h) + g(x+h)\right] - \left[f(x) + g(x)\right]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

Nuevamente, el penúltimo paso fue el fundamental. Está justificado por el teorema principal de límites parte 4. ■

Cualquier operador L con la propiedad establecida en los teoremas D y E se denomina *lineal*; esto es, L es un **operador lineal** si para todas las funciones f y g:

1. $L(kf) = kL(f)$, para toda constante k;
2. $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

Los operadores lineales aparecerán una y otra vez en este texto: D_x es un ejemplo particularmente importante. Un operador lineal siempre satisface la regla de diferencia $L(f - g) = L(f) - L(g)$, establecida enseguida para D_x.

Teorema F Regla para la diferencia

Si f y g son funciones derivables, entonces $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; esto es,

$$D_x\left[f(x) - g(x)\right] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

La demostración del teorema F se deja como ejercicio (véase el problema 54).

Operador lineal

El significado fundamental de la palabra *lineal*, como se utiliza en matemáticas, es el que se da en esta sección. Un operador L es lineal si satisface las dos condiciones clave:

- $L(ku) = kL(u)$
- $L(u + v) = L(u) + L(v)$

Los operadores lineales desempeñan un papel central en el curso de *álgebra lineal,* que muchos lectores de esta obra cursarán.

Funciones de la forma $f(x) = mx + b$ se denominan *funciones lineales* a consecuencia de su relación con líneas rectas. Esta terminología puede ser confusa, ya que no todas las funciones lineales son lineales, en el sentido de operadores. Para ver esto, observe que

$$f(kx) = m(kx) + b$$

mientras que

$$kf(x) = k(mx + b)$$

Por lo tanto, $f(kx) \neq kf(x)$ a menos que b sea cero.

EJEMPLO 1 Encuentre las derivadas de $5x^2 + 7x - 6$ y $4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
D_x(5x^2 + 7x - 6) &= D_x(5x^2 + 7x) - D_x(6) && \text{(Teorema F)}\\
&= D_x(5x^2) + D_x(7x) - D_x(6) && \text{(Teorema E)}\\
&= 5D_x(x^2) + 7D_x(x) - D_x(6) && \text{(Teorema D)}\\
&= 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 && \text{(Teoremas C, B, A)}\\
&= 10x + 7
\end{aligned}$$

Para encontrar la derivada siguiente, notamos que los teoremas de sumas y diferencias se extienden a cualquier número finito de términos. Así,

$$\begin{aligned}
&D_x(4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16)\\
&\quad = D_x(4x^6) - D_x(3x^5) - D_x(10x^2) + D_x(5x) + D_x(16)\\
&\quad = 4D_x(x^6) - 3D_x(x^5) - 10D_x(x^2) + 5D_x(x) + D_x(16)\\
&\quad = 4(6x^5) - 3(5x^4) - 10(2x) + 5(1) + 0\\
&\quad = 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5
\end{aligned}$$

■

El método del ejemplo 1 nos permite encontrar la derivada de cualquier polinomio. Si conocemos la regla de la potencias y hacemos que se vuelva natural, casi seguramente usted obtendrá el resultado correcto. También, con la práctica, encontrará que puede escribir la derivada de manera inmediata, sin tener que escribir todos los pasos intermedios.

Reglas para el producto y el cociente Ahora tendremos una sorpresa. Hasta aquí, hemos visto que el límite de una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de los límites (teorema 1.3A, partes 4 y 5); el límite de un producto o de un cociente es el producto o el cociente de los límites (teorema 1.3A, partes 6 y 7), y que la derivada de una suma o diferencia es la suma o diferencia de las derivadas (teoremas E y F). Así, ¿qué podría ser más natural que tener que la derivada de un producto es el producto de las derivadas?

Esto podría parecer natural, pero es erróneo. Para ver por qué, mírese el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Sea $g(x) = x$, $h(x) = 1 + 2x$, y $f(x) = g(x) \cdot h(x) = x(1 + 2x)$. Encuentre $D_x f(x)$, $D_x g(x)$, y $D_x h(x)$, y demuestre que $D_x f(x) \neq [D_x g(x)][D_x h(x)]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
D_x f(x) &= D_x[x(1 + 2x)]\\
&= D_x(x + 2x^2)\\
&= 1 + 4x\\
D_x g(x) &= D_x x = 1\\
D_x h(x) &= D_x(1 + 2x) = 2
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$D_x(g(x))D_x(h(x)) = 1 \cdot 2 = 2$$

mientras que

$$D_x f(x) = D_x[g(x)h(x)] = 1 + 4x$$

Por lo tanto, $D_x f(x) \neq [D_x g(x)][D_x h(x)]$. ■

Que la derivada de un producto debe ser el producto de las derivadas parecía tan natural que, incluso, engañó a Gottfried Wilhelm von Leibniz, uno de los descubridores del cálculo. En un manuscrito del 11 de noviembre de 1675, Leibniz calculó la derivada del producto de dos funciones y dijo (sin verificarlo) que era igual al producto de las derivadas. Diez días después, se dio cuenta del error y dio la regla correcta para el producto, que presentamos como teorema G.

Memorización

Algunas personas dicen que la memorización está pasada de moda y que sólo el razonamiento lógico es importante en matemáticas. Están equivocadas. Algunas cosas, (incluso, las reglas de esta sección) deben convertirse en parte de nuestro aparato mental para que puedan utilizarse sin detenerse a reflexionar.

"La civilización avanza extendiendo el número de operaciones importantes que podemos realizar sin pensar acerca de ellas".

Alfred N. Whitehead

Teorema G Regla para el producto

Si f y g son funciones derivables, entonces

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Esto es,

$$D_x\left[f(x)g(x)\right] = f(x)D_xg(x) + g(x)D_xf(x)$$

Esta regla debe ser memorizada en palabras como sigue: *la derivada de un producto de dos funciones es la primera por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera*.

Demostración Sea $F(x) = f(x)g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

La deducción que se acaba de dar depende, primero, del truco de sumar y restar la misma cosa, es decir, $f(x+h)g(x)$. Segundo, casi al final, utilizamos el hecho de que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Esto es sólo una aplicación del teorema 2.2A (que dice que la derivabilidad en un punto implica continuidad allí) y la definición de continuidad en un punto. ■

EJEMPLO 3 Encuentre la derivada de $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ mediante el uso de la regla del producto. Verifique su respuesta resolviendo el problema de una forma diferente.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
D_x\left[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\right] &= (3x^2 - 5)D_x(2x^4 - x) + (2x^4 - x)D_x(3x^2 - 5) \\
&= (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + (2x^4 - x)(6x) \\
&= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2 \\
&= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5
\end{aligned}$$

Para verificar, primero multipliquemos y luego tomemos la derivada.

$$(3x^2 - 5)(2x^4 - x) = 6x^6 - 10x^4 - 3x^3 + 5x$$

Así,

$$D_x\left[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\right] = D_x(6x^6) - D_x(10x^4) - D_x(3x^3) + D_x(5x)$$
$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Teorema H Regla para el cociente

Sean f y g funciones derivables con $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Es decir,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{g^2(x)}$$

Le recomendamos ampliamente que lo memorice en palabras como sigue: *la derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador*.

Demostración Sea $F(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\}$$
$$= \left[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)\right]\frac{1}{g(x)g(x)}$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(3x - 5)}{(x^2 + 7)}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x - 5}{x^2 + 7}\right] = \frac{(x^2 + 7)\dfrac{d}{dx}(3x - 5) - (3x - 5)\dfrac{d}{dx}(x^2 + 7)}{(x^2 + 7)^2}$$
$$= \frac{(x^2 + 7)(3) - (3x - 5)(2x)}{(x^2 + 7)^2}$$
$$= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $D_x y$ si $y = \dfrac{2}{x^4 + 1} + \dfrac{3}{x}$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
D_x y &= D_x\left(\frac{2}{x^4 + 1}\right) + D_x\left(\frac{3}{x}\right) \\
&= \frac{(x^4 + 1)D_x(2) - 2D_x(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^2} + \frac{xD_x(3) - 3D_x(x)}{x^2} \\
&= \frac{(x^4 + 1)(0) - (2)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} + \frac{(x)(0) - (3)(1)}{x^2} \\
&= \frac{-8x^3}{(x^4 + 1)^2} - \frac{3}{x^2}
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 6 Demuestre que la regla para la potencia se cumple para exponentes enteros negativos, es decir,

$$\boxed{D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}}$$

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

■

Como parte del ejemplo 5, vimos que $D_x(3/x) = -3/x^2$. Ahora tenemos otra forma de ver la misma cosa.

Revisión de conceptos

1. La derivada de un producto de dos funciones es la primera por _____ más la _____ por la derivada de la primera. En símbolos, $D_x[f(x)g(x)] =$ _____.

2. La derivada de un cociente es el _____ por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del _____, todo dividido entre el _____. En símbolos, $D_x[f(x)/g(x)] =$ _____.

3. El segundo término (el término que incluye a h) en la expansión de $(x + h)^n$ es _____. Este hecho lleva a la fórmula $D_x[x^n] =$ _____.

4. L se denomina operador lineal, si $L(kf) =$ _____ y $L(f + g) =$ _____. El operador de derivación denotado por _____ es un operador lineal.

Conjunto de problemas 2.3

En los problemas del 1 al 44, encuentre $D_x y$ mediante las reglas de esta sección.

1. $y = 2x^2$ **2.** $y = 3x^3$

3. $y = \pi x$ **4.** $y = \pi x^3$

5. $y = 2x^{-2}$ **6.** $y = -3x^{-4}$

7. $y = \dfrac{\pi}{x}$ **8.** $y = \dfrac{\alpha}{x^3}$

9. $y = \dfrac{100}{x^5}$ **10.** $y = \dfrac{3\alpha}{4x^5}$

11. $y = x^2 + 2x$ **12.** $y = 3x^4 + x^3$

13. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

14. $y = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + \pi x + \pi^2$

15. $y = \pi x^7 - 2x^5 - 5x^{-2}$

16. $y = x^{12} + 5x^{-2} - \pi x^{-10}$

17. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-4}$ **18.** $y = 2x^{-6} + x^{-1}$

19. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **20.** $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$

21. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$ **22.** $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{3}$

23. $y = x(x^2 + 1)$ **24.** $y = 3x(x^3 - 1)$

25. $y = (2x + 1)^2$ **26.** $y = (-3x + 2)^2$

27. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$ **28.** $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$

29. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

30. $y = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$

31. $y = (5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$

32. $y = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$

33. $y = \dfrac{1}{3x^2 + 1}$

34. $y = \dfrac{2}{5x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

36. $y = \dfrac{4}{2x^3 - 3x}$

37. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

38. $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

39. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

40. $y = \dfrac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

41. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

42. $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

43. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

44. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

45. Si $f(0) = 4$, $f'(0) = -1$, $g(0) = -3$, y $g'(0) = 5$, encuentre (a) $(f \cdot g)'(0)$ (b)$(f + g)'(0)$ (c)$(f/g)'(0)$

46. Si $f(3) = 7$, $f'(3) = 2$, $g(3) = 6$, y $g'(3) = -10$, encuentre (a) $(f - g)'(3)$ (b) $(f \cdot g)'(3)$ (c) $(g/f)'(3)$

47. Utilice la regla del producto para mostrar que $D_x\left[f(x)\right]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot D_x f(x)$.

EXPL **48.** Desarrolle una regla para $D_x\left[f(x)g(x)h(x)\right]$.

49. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 2x + 2$ en el punto $(1, 1)$.

50. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x^2 + 4)$ en el punto $(1, 1/5)$.

51. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^3 - x^2$, donde la recta tangente es horizontal.

52. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$, en donde la recta tangente tenga pendiente 1.

53. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 100/x^5$, donde la recta tangente sea perpendicular a la recta $y = x$.

54. Demuestre el teorema F de dos formas.

55. La altura, s, medida en pies, a la que se encuentra un balón, por encima del suelo a los t segundos está dada por $s = -16t^2 + 40t + 100$.

(a) ¿Cuál es su velocidad instantánea en $t = 2$?

(b) ¿Cuándo su velocidad instantánea es cero?

56. Una pelota rueda hacia abajo a lo largo de un plano inclinado, de modo que su distancia s desde su punto de inicio después de t segundos es $s = 4.5t^2 + 2t$ pies. ¿Cuándo su velocidad instantánea será de 30 pies por segundo?

≈ **57.** Existen dos rectas tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2, 5)$. Encuentre las ecuaciones de ambas. *Sugerencia*: sea (x_0, y_0) un punto de tangencia. Determine dos condiciones que (x_0, y_0) debe satisfacer. Véase la figura 4.

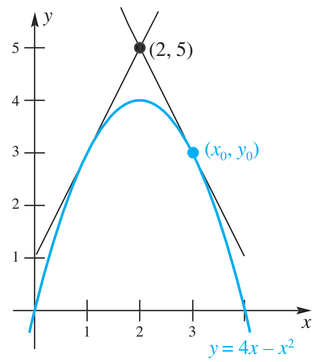


Figura 4

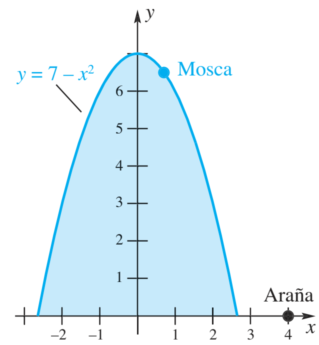


Figura 5

≈ **58.** Una viajera espacial se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Cuando apague los motores, continuará viajando a lo largo de la recta tangente en el punto en que ella esté en ese momento. ¿En qué momento debe apagar los motores para que alcance el punto $(4, 15)$?

≈ **59.** Una mosca se arrastra de izquierda a derecha a lo largo de la parte superior de la curva $y = 7 - x^2$ (véase la figura 5). Una araña espera en el punto $(4, 0)$. Determine la distancia entre los dos insectos cuando se ven por primera vez.

60. Sea $P(a, b)$ un punto en la parte del primer cuadrante de la curva $y = 1/x$ suponga que la recta tangente en P interseca al eje x en A. Demuestre que el triángulo AOP es isósceles y determine su área.

61. El radio de una sandia esférica está creciendo a una velocidad constante de 2 centímetros por semana. El grosor de la cáscara siempre es la décima parte del radio. ¿Qué tan rápido está creciendo el volumen de la cáscara al final de la quinta semana? Suponga que el radio inicialmente es cero.

CAS **62.** Vuelva a resolver los problemas del 29 al 44 en una computadora y compare sus respuestas con las obtenidas de forma manual.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** la derivada de la segunda; segunda; $f(x)D_xg(x) + g(x)D_xf(x)$ **2.** denominador, denominador; cuadrado del denominador; $[g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)]/g^2(x)$ **3.** $nx^{n-1}h$; nx^{n-1} **4.** $kL(f)$; $L(f) + L(g)$; D_x

2.4 Derivadas de funciones trigonométricas

La figura 1 nos recuerda la definición de las funciones seno y coseno. En lo que sigue, t debe considerarse como un número que mide la longitud de un arco en el círculo unitario o, de forma equivalente, como el número de radianes en el ángulo correspondiente. Por lo tanto, $f(t) = \text{sen}\, t$ y $g(t) = \cos t$ son funciones para las cuales tanto el dominio como el rango son conjuntos de números reales. Podemos considerar el problema de determinar sus derivadas.

Fórmulas de las derivadas Elegimos utilizar x en lugar de t como nuestra variable básica. Para determinar $D_x(\text{sen}\, x)$, apelamos a la definición de la derivada y utilizamos la identidad de suma de ángulos para $\text{sen}(x + h)$.

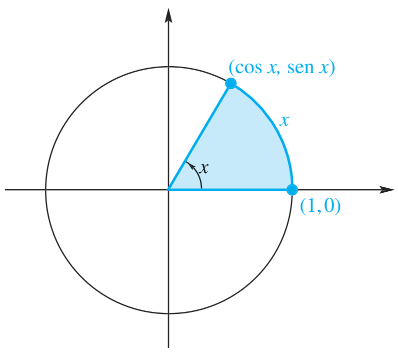


Figura 1

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(-\operatorname{sen} x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

$$= (-\operatorname{sen} x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]$$

Observe que los dos límites en esta última expresión son exactamente los límites estudiados en la sección 1.4. En el teorema 1.4B demostramos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$$

Por consiguiente,

$$D_x(\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

De manera análoga,

$$D_x(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(-\cos x \frac{1-\cos h}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

$$= (-\cos x)\cdot 0 - (\operatorname{sen} x)\cdot 1$$

$$= -\operatorname{sen} x$$

Resumimos estos resultados en un teorema importante.

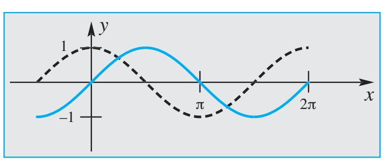
Teorema A

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son derivables y,

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

¿Pudo haber adivinado?

La curva con línea continua es la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. Observe que la pendiente es 1 en 0, 0 en $\pi/2$, –1 en π y así sucesivamente. Cuando graficamos la función de las pendientes (la derivada), obtenemos la curva con línea discontinua. ¿Pudo haber adivinado que $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$?



Trate de graficar estas dos funciones en la misma ventana en su CAS o en su calculadora gráfica.

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x(3 \operatorname{sen} x - 2\cos x)$.

SOLUCIÓN

$$D_x(3\operatorname{sen} x - 2\cos x) = 3D_x(\operatorname{sen} x) - 2D_x(\cos x)$$

$$= 3\cos x + 2\operatorname{sen} x$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi, 0)$. (Véase la figura 2.)

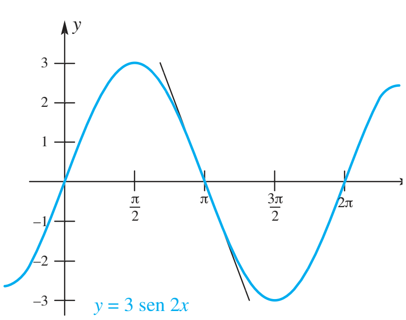


Figura 2

SOLUCIÓN La derivada es $\dfrac{dy}{dx} = 3\cos x$, así que cuando $x = \pi$, la pendiente es $3\cos\pi = -3$. Mediante la forma punto pendiente para la recta determinamos que una ecuación de la recta tangente es

$$y - 0 = -3(x - \pi)$$
$$y = -3x + 3\pi$$ ■

Las reglas del producto y del cociente son útiles al evaluar derivadas de funciones que incluyan a las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 Determine $D_x(x^2 \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Aquí se necesita la regla del producto.

$$D_x(x^2 \operatorname{sen} x) = x^2 D_x(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x(D_x x^2) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$.

SOLUCIÓN Para este problema es necesaria la regla del cociente.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\left(\dfrac{d}{dx}(1 + \operatorname{sen} x)\right) - (1 + \operatorname{sen} x)\left(\dfrac{d}{dx}\cos x\right)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$ ■

EJEMPLO 5 En el instante t segundos el centro de un corcho, que está flotando en el agua, es $y = 2 \operatorname{sen} t$ centímetros por arriba (o por debajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

SOLUCIÓN La velocidad es la derivada de la posición y $\dfrac{dy}{dt} = 2 \cos t$. Por lo tanto, cuando $t = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = 2 \cos 0 = 2$, cuando $t = \pi/2$, $\dfrac{dy}{dt} = 2 \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, y cuando $t = \pi$, $\dfrac{dy}{dt} = 2 \cos \pi = -2$. ■

Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante están definidas en términos de las funciones seno y coseno, las derivadas de estas funciones pueden obtenerse con base en el teorema A mediante la aplicación de la regla del cociente. Los resultados se resumen en el teorema B; véanse los problemas del 5 al 8.

Teorema B

Para todos los puntos x en el dominio de la función,

$$D_x \tan x = \sec^2 x \qquad D_x \cot x = -\csc^2 x$$
$$D_x \sec x = \sec x \tan x \qquad D_x \csc x = -\csc x \cot x$$

EJEMPLO 6 Determine $D_x(x^n \tan x)$ para $n \geq 1$.

SOLUCIÓN Aplicamos la regla del producto junto con el teorema B.

$$D_x(x^n \tan x) = x^n D_x(\tan x) + \tan x(D_x x^n)$$
$$= x^n \sec^2 x + n x^{n-1} \tan x$$ ■

EJEMPLO 7 Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \tan x$ en el punto $(\pi/4, 1)$.

SOLUCIÓN La derivada de $y = \tan x$ es $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$. Cuando $x = \pi/4$, la derivada es igual a $\sec^2 \dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$. Así que la recta requerida tiene pendiente 2 y pasa por $(\pi/4, 1)$. Por lo tanto,

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

■

EJEMPLO 8 Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN La recta tangente es horizontal cuando la derivada es igual a cero. Para obtener la derivada de $\operatorname{sen}^2 x$, utilizamos la regla del producto.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^2 x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

El producto de sen x y cos x es igual a cero cuando sen x o cos x son iguales a cero; esto es, en $x = 0, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$. ■

Revisión de conceptos

1. Por la definición, $D_x(\operatorname{sen} x) = \lim\limits_{h\to 0}$ _____.

2. Para evaluar el límite en la proposición anterior, primero utilizamos la identidad de la suma de ángulos para la función seno y luego realizamos un poco de álgebra para obtener

$$D_x(\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1 - \cos h}{h}\right) + (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

Los dos límites mostrados tienen los valores _______ y _______, respectivamente.

3. El resultado del cálculo en la proposición anterior es la importante fórmula de la derivada $D_x(\operatorname{sen} x) =$ _____. La correspondiente fórmula para la derivada $D_x(\cos x) =$ _____ se obtiene de manera análoga.

4. En $x = \pi/3$, $D_x(\operatorname{sen} x)$ tiene el valor _____. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/3$ es _____.

Conjunto de problemas 2.4

En los problemas del 1 al 18 encuentre $D_x y$.

1. $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$
2. $y = \operatorname{sen}^2 x$
3. $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
4. $y = 1 - \cos^2 x$
5. $y = \sec x = 1/\cos x$
6. $y = \csc x = 1/\operatorname{sen} x$
7. $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
8. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
9. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$
10. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\tan x}$
11. $y = \operatorname{sen} x \cos x$
12. $y = \operatorname{sen} x \tan x$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
14. $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$
15. $y = x^2 \cos x$
16. $y = \dfrac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$
17. $y = \tan^2 x$
18. $y = \sec^3 x$

$\boxed{C}$ **19.** Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cos x$ en $x = 1$.

20. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cot x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

21. Utilice la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \operatorname{sen} 2x$.

22. Utilice la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \cos 2x$.

23. Una rueda de la fortuna de 30 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 2 radianes por segundo. ¿Qué tan rápido se eleva (verticalmente) un asiento en el borde de la rueda cuando está 15 pies por encima de la recta horizontal que pasa por el centro de la rueda? *Sugerencia:* use el resultado del problema 21.

24. Una rueda de la fortuna de 20 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 1 radián por segundo. Un asiento en el borde de la rueda está en $(20, 0)$ en $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son sus coordenadas en $t = \pi/6$?

(b) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) en $t = \pi/6$?

(c) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) cuando lo hace a la velocidad máxima?

25. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \tan x$ en $x = 0$.

26. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \tan^2 x$, donde la recta tangente es horizontal.

27. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 9 \operatorname{sen} x \cos x$, donde la recta tangente es horizontal.

28. Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente es horizontal. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente tiene pendiente 2

29. Demuestre que las curvas $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2} \cos x$ se intersecan en ángulos rectos sobre cierto punto, con $0 < x < \pi/2$.

30. A los t segundos, el centro de un corcho que se balancea está $3 \operatorname{sen} 2t$ centímetros arriba (o abajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

31. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} x^2) = 2x \cos x^2$.

32. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} 5x) = 5 \cos 5x$

$\boxed{\text{GC}}$ *Los problemas 33 y 34 son ejercicios para computadora o calculadora gráfica.*

33. Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$ en $[\pi, 6\pi]$.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = 0$ en $[\pi, 6\pi]$? ¿Cuántas soluciones tiene $f'(x) = 0$ en este intervalo?

(c) ¿En la siguiente conjetura, qué es incorrecto? Si f y f' son funciones continuas y derivables en $[a, b]$, si $f(a) = f(b) = 0$, y si $f(x) = 0$ tiene exactamente n soluciones en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n - 1$ soluciones en $[a, b]$.

(d) Determine el valor máximo de $|f(x) - f'(x)|$ en $[\pi, 6\pi]$.

34. Sea $f(x) = \cos^3 x - 1.25 \cos^2 x + 0.225$. Determine $f'(x_0)$ en el punto x_0 en $[\pi/2, \pi]$ donde $f(x_0) = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $[\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x]/h$ **2.** 0; 1
3. $\cos x; -\operatorname{sen} x$ **4.** $\frac{1}{2}$; $y - \sqrt{3}/2 = \frac{1}{2}(x - \pi/3)$

2.5 La regla de la cadena

Imagine que trata de encontrar la derivada de

$$F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Podríamos encontrar la derivada, pero primero tendríamos que multiplicar los 60 factores cuadráticos de $2x^2 - 4x + 1$ y después derivar el polinomio resultante. Y qué tal si trata de encontrar la derivada de

$$G(x) = \operatorname{sen} 3x$$

Podríamos ser capaces de utilizar algunas identidades trigonométricas para reducirla a algo que dependa de sen x y cos x y después usar las reglas de la sección anterior.

Por fortuna, existe un método mejor. Después de aprender la *regla de la cadena*, seremos capaces de escribir las respuestas

$$F'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}\,(4x - 4)$$

y

$$G'(x) = 3 \cos 3x$$

La regla de la cadena es tan importante que rara vez usted derivará alguna función sin utilizarla.

Derivada de una función compuesta Si David puede mecanografiar dos veces más rápido que María, y María puede mecanografiar tres veces más rápido que José, entonces David puede mecanografiar $2 \times 3 = 6$ veces más rápido que José.

Considere la función compuesta $y = f(g(x))$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces podremos pensar en f como una función de u. Suponga que $f(u)$ cambia el doble de rápido que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x. ¿Qué tan rápido está cambiando y? Los enunciados "$y = f(u)$ cambia el doble de rápido que u" y "$u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x" pueden volver a enunciarse como

$$\frac{dy}{du} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 3$$

Al igual que en el párrafo anterior, parece como si las tasas se multiplicaran; es decir, la tasa de cambio de y con respecto a x debe ser igual a la tasa de cambio de y con respecto a u por la tasa de cambio de u con respecto a x. En otras palabras,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Esto en realidad es cierto, y haremos un bosquejo de la demostración al final de la sección. El resultado se denomina **regla de la cadena.**

Teorema A **Regla de la cadena**

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si g es derivable en x y f es derivable en $u = g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Esto es,

$$D_x f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Puede recordar la regla de la cadena de esta manera: *la derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interna, por la derivada de la función interna.*

Aplicaciones de la regla de la cadena Empezamos con el ejemplo $(2x^2 - 4x + 1)^{60}$ introducido al inicio de esta sección.

EJEMPLO 1 Si $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, encuentre $D_x y$.

SOLUCIÓN Consideramos a y como la sexagésima potencia de una función de x; esto es

$$y = u^{60} \quad \text{y} \quad u = 2x^2 - 4x + 1$$

La función exterior es $f(u) = u^{60}$ y la función interna es $u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(u)g'(x) \\ &= (60u^{59})(4x - 4) \\ &= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Si $y = 1/(2x^5 - 7)^3$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Considérelo de esta manera.

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \quad \text{y} \quad u = 2x^5 - 7$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ &= (-3u^{-4})(10x^4) \\ &= \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4 \\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4}\end{aligned}$$

■

Primero el último

Aquí está una regla informal que puede ayudarle a utilizar las reglas de las derivadas.

El último paso en el cálculo corresponde al primer paso en la derivación.

Por ejemplo, el último paso al calcular $(2x+1)^3$, es elevar al cubo $2x+1$, de modo que primero aplicaría la regla de la cadena a la función cúbica. El último paso al calcular

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

es tomar el cociente, de modo que la primera regla que se utiliza en la derivación es la regla del cociente.

EJEMPLO 3 Encuentre $D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13}$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería elevar la expresión interna al exponente 13. Por lo tanto, iniciamos aplicando la regla de la cadena a la función $y = u^{13}$, donde $u = (t^3 - 2t + 1)/(t^4 + 3)$. La regla de la cadena seguida de la regla del cociente da

$$\begin{aligned}D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13} &= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13-1} D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right) \\ &= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \frac{(t^4 + 3)(3t^2 - 2) - (t^3 - 2t + 1)(4t^3)}{(t^4 + 3)^2} \\ &= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \frac{-t^6 + 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 6}{(t^4 + 3)^2}\end{aligned}$$

■

La regla de la cadena simplifica el cálculo de muchas derivadas que incluyen funciones trigonométricas. Aunque es posible derivar $y = \operatorname{sen} 2x$ mediante identidades trigonométricas (véase el problema 21 de la sección anterior), es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

EJEMPLO 4 Si $y = \operatorname{sen} 2x$, determine $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería tomar el seno de la cantidad $2x$. Por lo tanto, utilizamos la regla de la cadena sobre la función $y = \operatorname{sen} u$, donde $u = 2x$.

$$\frac{dy}{dx} = (\cos 2x)\left(\frac{d}{dx}2x\right) = 2\cos 2x$$

■

EJEMPLO 5 Determine $F'(y)$, en donde $F(y) = y \operatorname{sen} y^2$

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería multiplicar y y sen y^2, por lo que iniciamos con la aplicación de la regla del producto. Se necesita la regla de la cadena cuando derivamos sen y^2.

$$\begin{aligned}F'(y) &= yD_y[\operatorname{sen} y^2] + (\operatorname{sen} y^2)D_y(y) \\ &= y(\cos y^2)D_y(y^2) + (\operatorname{sen} y^2)(1) \\ &= 2y^2 \cos y^2 + \operatorname{sen} y^2\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Determine $D_x\left(\dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería tomar el cociente. Así, se aplica primero la regla del cociente. Pero observe que cuando tomamos la derivada del numerador, debemos aplicar la regla del producto y luego la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right) &= \frac{(1+x)D_x(x^2(1-x)^3) - x^2(1-x)^3 D_x(1+x)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)[x^2 D_x(1-x)^3 + (1-x)^3 D_x(x^2)] - x^2(1-x)^3(1)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)[x^2(3(1-x)^2(-1)) + (1-x)^3(2x)] - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)[-3x^2(1-x)^2 + 2x(1-x)^3] - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)(1-x)^2 x(2-5x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 7 Determine $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(2x-1)^3}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3} = \frac{d}{dx}(2x-1)^{-3} = -3(2x-1)^{-3-1}\frac{d}{dx}(2x-1) = -\frac{6}{(2x-1)^4}$$ ■

En este último ejemplo fuimos capaces de evitar la regla del cociente. Si utiliza la regla del cociente, notará que la derivada del numerador es 0, lo cual simplifica el cálculo. (Debe comprobar que la regla del cociente da la misma respuesta anterior). Como regla general, si el numerador de una fracción es una constante, entonces no utilice la regla del cociente; en lugar de eso, escriba el cociente como el producto de una constante y la expresión en el denominador elevada a una potencia negativa; luego aplique la regla de la cadena.

> **Notación para la derivada**
>
> En esta sección hemos utilizado las diferentes notaciones para la derivada, a saber,
>
> $$f'(x)$$
>
> $$\frac{dy}{dx}$$
>
> y
>
> $$D_x f(x)$$
>
> Ahora usted debe estar familiarizado con todas estas notaciones. Todas ellas se utilizarán en el resto del libro.

EJEMPLO 8 Exprese las siguientes derivadas en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

$$\text{(a) } D_x(F(x^3)) \quad \text{y} \quad \text{(b) } D_x[(F(x))^3]$$

SOLUCIÓN

(a) El último paso en el cálculo de esta expresión sería aplicar la función F. [Aquí, la función interna es $u = x^3$ y la función externa es $F(u)$]. Por lo tanto

$$D_x(F(x^3)) = F'(x^3)D_x(x^3) = 3x^2 F'(x^3)$$

(b) Para esta expresión, primero evaluaríamos $F(x)$ y luego elevaríamos al cubo el resultado. [Aquí, la función interna es $u = F(x)$ y la función externa es u^3]. Así que primero aplicamos la regla de la potencia y luego la regla de la cadena.

$$D_x[(F(x))^3] = 3[F(x)]^2 D_x(F(x)) = 3[F(x)]^2 F'(x)$$ ■

Aplicación de la regla de la cadena más de una vez Algunas veces, cuando aplicamos la regla de la cadena a una función compuesta encontramos que la derivación de la función interna también requiere de la regla de la cadena. En casos como éste, basta con utilizar la regla de la cadena una segunda vez.

EJEMPLO 9 Encuentre $D_x \operatorname{sen}^3(4x)$.

SOLUCIÓN Recuerde que $\operatorname{sen}^3(4x) = [\operatorname{sen}(4x)]^3$, de modo que vemos esto como el cubo de una función de x. Así, al aplicar nuestra regla, "derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interna", tenemos

$$D_x \operatorname{sen}^3(4x) = D_x[\operatorname{sen}(4x)]^3 = 3[\operatorname{sen}(4x)]^{3-1}D_x[\operatorname{sen}(4x)]$$

Ahora aplicamos la regla de la cadena una vez más para la derivada de la función interna.

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}^3(4x) &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^{3-1}D_x \operatorname{sen}(4x) \\ &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^2 \cos(4x) D_x(4x) \\ &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^2 \cos(4x)(4) \\ &= 12 \cos(4x) \operatorname{sen}^2(4x) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 10 Encuentre $D_x \operatorname{sen}[\cos(x^2)]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}[\cos(x^2)] &= \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\operatorname{sen}(x^2)] \cdot 2x \\ &= -2x \operatorname{sen}(x^2) \cos[\cos(x^2)] \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 11 Suponga que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son como se muestran en la figura 1. Utilice estas gráficas para aproximar (a) $(f - g)'(2)$ y (b) $(f \circ g)'(2)$.

SOLUCIÓN

(a) Por el teorema 2.3F, $(f - g)'(2) = f'(2) - g'(2)$. Con base en la figura 1, podemos determinar que $f'(2) \approx 1$ y $g'(2) \approx -\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$(f - g)'(2) \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

(b) Con base en la figura 1, podemos determinar que $f'(1) \approx \frac{1}{2}$. Por lo tanto, por la regla de la cadena

$$(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(1)g'(2) \approx \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

■

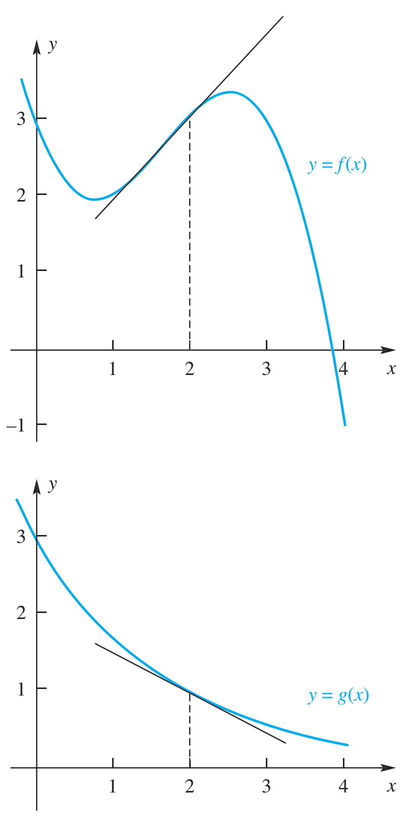


Figura 1

Una demostración parcial de la regla de la cadena Ahora podemos dar un esbozo de la demostración de la regla de la cadena.

Demostración Supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$, que g es derivable en x y que f es derivable en $u = g(x)$. Cuando a x se le da un incremento Δx, existen incrementos correspondientes en u y y dados por

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x) \\ \Delta y &= f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) \\ &= f(u + \Delta u) - f(u) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como g es derivable en x, es continua allí (véase el teorema 2.2A), y de este modo $\Delta x \to 0$ fuerza a $\Delta u \to 0$. De aquí que,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta demostración es muy directa, pero desafortunadamente contiene un error sutil. Existen funciones $u = g(x)$ con la propiedad de que $\Delta u = 0$ para algunos puntos en toda vecindad de x (la función constante $g(x) = k$ es un buen ejemplo). Esto significa que la división entre Δu en nuestro primer paso podría no ser legal. No hay una forma sencilla de dar la vuelta a esta dificultad, aunque la regla de la cadena es válida, incluso en este caso. Damos una demostración completa de la regla de la cadena en el apéndice (véase la sección A.2, teorema B). ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(u)$, donde $u = g(t)$, entonces $D_t y = D_u y \cdot$ ______. En notación de funciones, $(f \circ g)'(t) =$ ______ ______.

2. Si $w = G(v)$, donde $v = H(s)$, entonces $D_s w =$ ______ $D_s v$. En notación de funciones $(G \circ H)'(s) =$ ______ ______.

3. $D_x \cos[(f(x))^2] = -\text{sen}($______$) \cdot D_x($______$)$.

4. Si $y = (2x+1)^3 \,\text{sen}(x^2)$, entonces $D_x y = (2x+1)^3 \cdot$ ______ $+ \,\text{sen}(x^2) \cdot$ ______.

Conjunto de problemas 2.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre $D_x y$.

1. $y = (1+x)^{15}$

2. $y = (7+x)^5$

3. $y = (3-2x)^5$

4. $y = (4+2x^2)^7$

5. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$

6. $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$

7. $y = \dfrac{1}{(x+3)^5}$

8. $y = \dfrac{1}{(3x^2+x-3)^9}$

9. $y = \text{sen}(x^2 + x)$

10. $y = \cos(3x^2 - 2x)$

11. $y = \cos^3 x$

12. $y = \text{sen}^4(3x^2)$

13. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

14. $y = \left(\dfrac{x-2}{x-\pi}\right)^{-3}$

15. $y = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$

16. $y = \cos^3\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

17. $y = (3x-2)^2(3-x^2)^2$

18. $y = (2-3x^2)^4(x^7+3)^3$

19. $y = \dfrac{(x+1)^2}{3x-4}$

20. $y = \dfrac{2x-3}{(x^2+4)^2}$

En los problemas del 21 al 28 encuentre la derivada que se indica.

21. y' donde $y = (x^2+4)^2$

22. y' donde $y = (x + \text{sen}\, x)^2$

23. $D_t\left(\dfrac{3t-2}{t+5}\right)^3$

24. $D_s\left(\dfrac{s^2-9}{s+4}\right)$

25. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{(3t-2)^3}{t+5}\right)$

26. $\dfrac{d}{d\theta}(\text{sen}^3\theta)$

27. $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos 2x}\right)^3$

28. $\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = [\text{sen}\, t \tan(t^2+1)]$

En los problemas del 29 al 32 evalúe la derivada que se indica.

29. $f'(3)$,si $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)^3$

30. $G'(1)$ si $G(t) = (t^2+9)^3(t^2-2)^4$

C **31.** $F'(1)$ si $F(t) = \text{sen}(t^2 + 3t + 1)$

32. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $g(s) = \cos \pi s \,\text{sen}^2 \pi s$

En los problemas del 33 al 40 aplique la regla de la cadena más de una vez para encontrar la derivada que se indica.

33. $D_x[\text{sen}^4(x^2+3x)]$

34. $D_t[\cos^5(4t-19)]$

35. $D_t[\text{sen}^3(\cos t)]$

36. $D_u\left[\cos^4\left(\dfrac{u+1}{u-1}\right)\right]$

37. $D_\theta[\cos^4(\text{sen}\,\theta^2)]$

38. $D_x[x\,\text{sen}^2(2x)]$

39. $\dfrac{d}{dx}\{\text{sen}[\cos(\text{sen}\, 2x)]\}$

40. $\dfrac{d}{dt}\{\cos^2[\cos(\cos t)]\}$

En los problemas 41 al 46 utilice las figuras 2 y 3 para aproximar las expresiones que se indican.

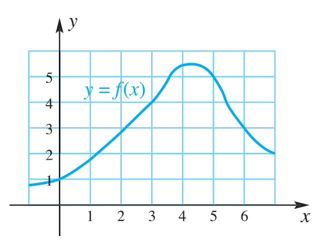


Figura 2

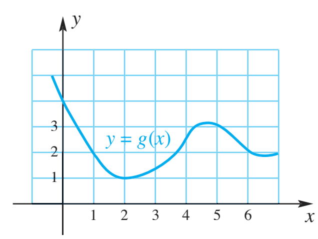


Figura 3

41. $(f+g)'(4)$

42. $(f-2g)'(2)$

43. $(fg)'(2)$

44. $(f/g)'(2)$

45. $(f \circ g)'(6)$

46. $(g \circ f)'(3)$

En los problemas del 47 al 58 exprese la derivada que se indica en términos de la función F(x). Suponga que F es derivable.

47. $D_x(F(2x))$

48. $D_x(F(x^2+1))$

49. $D_t((F(t))^{-2})$

50. $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(F(z))^2}\right)$

51. $\frac{d}{dz}(1 + (F(2z)))^2$

52. $\frac{d}{dy}\left(y^2 + \frac{1}{F(y^2)}\right)$

53. $\frac{d}{dx}F(\cos x)$

54. $\frac{d}{dx}\cos F(x)$

55. $D_x \tan F(2x)$

56. $\frac{d}{dx}g(\tan 2x)$

57. $D_x(F(x)\operatorname{sen}^2 F(x))$

58. $D_x \sec^3 F(x)$

59. Dado que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$, determine $g'(0)$ en donde $g(x) = \cos f(x)$.

60. Dado que $F(0) = 2$ y $F'(0) = -1$, determine $G'(0)$ en donde $G(x) = \frac{x}{1 + \sec F(2x)}$.

61. Dado que $f(1) = 2, f'(1) = -1, g(1) = 0$ y $g'(1) = 1$, determine $F'(1)$, en donde $F(x) = f(x)\cos g(x)$.

62. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 1 + x \operatorname{sen} 3x$ en $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$. ¿En dónde esta recta corta al eje x?

63. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$, donde la recta tangente tiene pendiente 1.

64. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^3(x^4 + 1)^2$ en $(1, 32)$.

65. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

66. ¿En dónde cruza el eje x la recta tangente a $y = (2x + 1)^3$ en $(0, 1)$?

67. La recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, ¿en dónde cruza el eje x?

68. Un punto P está moviéndose en el plano de modo que sus coordenadas después de t segundos son $(4 \cos 2t, 7 \operatorname{sen} 2t)$, medidas en pies.

(a) Demuestre que P está siguiendo una trayectoria elíptica. *Sugerencia:* demuestre que $(x/4)^2 + (y/7)^2 = 1$, que es una ecuación de una elipse.

(b) Obtenga una expresión para L, la distancia de P al origen en el instante t.

(c) ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre P y el origen cuando $t = \pi/8$? Necesitará el hecho de que $D_u(\sqrt{u}) = 1/(2\sqrt{u})$ (véase el ejemplo 4 de la sección 2.2).

69. Una rueda con centro en el origen y de radio 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde está en $(10, 0)$ cuando $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P después de t segundos?

(b) ¿A qué velocidad se está elevando (o descendiendo) P en el instante $t = 1$?

70. Considere el dispositivo rueda-pistón de la figura 4. La rueda tiene radio de 1 pie y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a 2 radianes por segundo. La varilla conectada tiene 5 pies de longitud. El punto P está en $(1, 0)$ cuando $t = 0$

(a) Encuentre las coordenadas de P en el instante t.

(b) Encuentre la ordenada (coordenada y) de Q en el instante t (la abscisa siempre es cero).

(c) Determine la velocidad de Q en el instante t. Necesitará el hecho de que $D_u(\sqrt{u}) = 1/(2\sqrt{u})$.

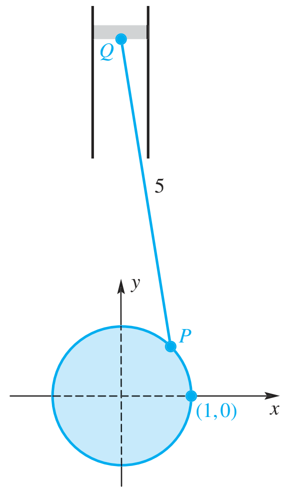


Figura 4

71. Haga el problema 70, suponiendo que la rueda está girando a 60 revoluciones por minuto y t se mide en segundos.

72. La carátula de un reloj común tiene un radio de 10 centímetros. Un extremo de una cuerda elástica se sujeta al borde en el 12 y el otro extremo a la punta del minutero, que es de 10 centímetros de longitud. ¿A qué velocidad se está estirando la cuerda a las 12:15 (suponiendo que el reloj no se retrasa debido a este estiramiento)?

C **73.** El horario y el minutero de un reloj son de 6 y 8 pulgadas de longitud, respectivamente. ¿Qué tan rápido se están separando las manecillas a las 12:20 (véase la figura 5)? *Sugerencia:* ley de los cosenos.

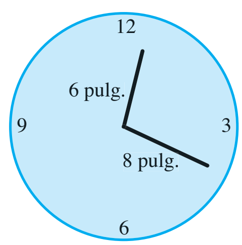


Figura 5

≈ GC **74.** Encuentre el tiempo aproximado entre las 12:00 y la 1:00 cuando la distancia s entre las puntas de las manecillas del reloj de la figura 5 está aumentando más rápidamente, esto es, cuando la derivada ds/dt es mayor.

75. Sea x_0 el valor positivo más pequeño de x en el que las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ se intersecan. Determine x_0 y también el ángulo agudo en el que las dos curvas se intersecan en x_0 (véase el problema 40 de la sección 0.7).

76. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 6. Sea D el área del triángulo AOB y E, el área de la región sombreada. Determine una fórmula para D/E en términos de t y luego calcule

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{D}{E} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to \pi^-}\frac{D}{E}$$

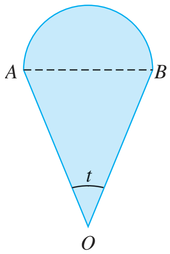


Figura 6

77. Demuestre que $D_x|x| = |x|/x$, $x \neq 0$. *Sugerencia:* Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena con $u = x^2$

78. Aplique el resultado del problema 77 para encontrar $D_x|x^2 - 1|$.

79. Aplique el resultado del problema 77 para encontrar $D_x|\text{sen } x|$.

80. En el capítulo 6 estudiaremos una función L que satisface $L'(x) = 1/x$. Encuentre cada una de las siguientes derivadas.

(a) $D_x(L(x^2))$ (b) $D_x(L(\cos^4 x))$

81. Sea $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Encuentre la derivada de $f(f(f(f(x))))$ en $x = 0$

82. Suponga que f es una función derivable.

(a) Encuentre $\dfrac{d}{dx}f(f(x))$. (b) Encuentre $\dfrac{d}{dx}f(f(f(x)))$.

(c) Denótese con $f^{[n]}$ la función definida como sigue $f^{[1]} = f$ y $f^{[n]} = f \circ f^{[n-1]}$ para $n \geq 2$. Por lo que, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, y así sucesivamente. Con base en sus resultados de las partes (a) y (b), haga una conjetura considerando $\dfrac{d}{dx}f^{[n]}$. Demuestre su conjetura.

83. Proporcione una segunda demostración de la regla del cociente. Escriba

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_x\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)$$

y utilice la regla del producto y la regla de la cadena.

84. Suponga que f es derivable y que existen números reales x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_1$. Sea $g(x) = f(f(f(f(x))))$. Demuestre que $g'(x_1) = g'(x_2)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $D_t u$; $f'(g(t))g'(t)$ **2.** $D_v w$; $G'(H(s))H'(s)$ **3.** $(f(x))^2$; $(f(x))^2$ **4.** $2x\cos(x^2)$; $6(2x + 1)^2$

2.6 Derivadas de orden superior

La operación de derivación toma una función f y produce una nueva función f'. Si ahora derivamos f', producimos otra función denotada por f'' (léase "f biprima") y denominada **segunda derivada** de f. A su vez, puede derivarse, y de ahí producir f''', que se denomina **tercera derivada** de f, y así sucesivamente. La **cuarta derivada** se denota con $f^{(4)}$, la **quinta derivada** se denota con $f^{(5)}$, etcétera.

Por ejemplo, si

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

entonces

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$
$$f''(x) = 12x - 8$$
$$f'''(x) = 12$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

Como la derivada de la función cero es cero, la cuarta derivada y todas las *derivadas de orden superior* de f serán cero.

Hemos introducido tres notaciones para la derivada (ahora también llamada la *primera derivada*) de $y = f(x)$. Son

$$f'(x) \qquad D_x y \qquad \frac{dy}{dx}$$

denominadas, respectivamente, *notación prima*, *notación D* y *notación de Leibniz*. Hay una variación de la notación prima, y', que se utilizará en ocasiones. Todas estas notaciones tienen extensiones para derivadas de orden superior, como se muestra en la siguiente tabla. Observe especialmente que la notación de Leibniz, aunque complicada, le pareció más apropiada a Leibniz. Él pensó que es más natural escribir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{como} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

La notación de Leibniz para la segunda derivada se lee *la segunda derivada de y respecto a x*.

Notaciones para las derivadas de $y = f(x)$

Derivada	f' Notación	y' Notación	D Notación	Notación de Leibniz
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

EJEMPLO 1 Si $y = \text{sen } 2x$, encuentre d^3y/dx^3, d^4y/dx^4 y $d^{12}y/dx^{12}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2^2 \text{ sen } 2x$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2^3 \cos 2x$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \text{ sen } 2x$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2^5 \cos 2x$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 2^{12} \text{ sen } 2x$$

■

Velocidad y aceleración En la sección 2.1 utilizamos la noción de velocidad instantánea para motivar la definición de la derivada. Revisemos esta noción por medio de un ejemplo. También, a partir de ahora, utilizaremos la sola palabra *velocidad* en lugar de la frase más larga *velocidad instantánea*.

EJEMPLO 2 Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición s satisface $s = 2t^2 - 12t + 8$, donde s se mide en centímetros y t en segundos con $t \geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 6$. ¿En qué momento la velocidad es cero? ¿Cuándo es positiva?

SOLUCIÓN Si utilizamos el símbolo $v(t)$ para la velocidad en el instante t, entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

Así,

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8 \text{ centímetros por segundo}$$
$$v(6) = 4(6) - 12 = 12 \text{ centímetros por segundo}$$

La velocidad es cero cuando $4t - 12 = 0$, esto es, cuando $t = 3$. La velocidad es positiva cuando $4t - 12 > 0$, o cuando $t > 3$. Todo esto se muestra de manera esquemática en la figura 1.

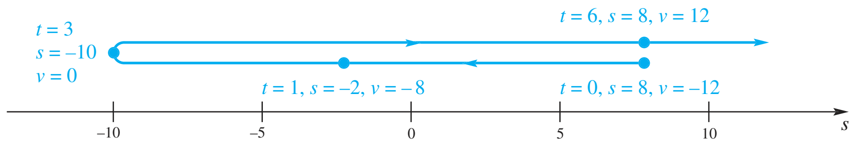


Figura 1

Por supuesto, el objeto está moviéndose a lo largo del eje s, no sobre la trayectoria señalada. Pero la trayectoria señalada muestra lo que le sucede al objeto. Entre $t = 0$ y $t = 3$ la velocidad es negativa; el objeto se mueve hacia la izquierda (regresando). En el instante $t = 3$ se ha "frenado" a una velocidad cero. Después inicia a moverse hacia la derecha conforme su velocidad se vuelve positiva. Así, velocidad negativa corresponde al movimiento en la dirección que disminuye s; velocidad positiva corresponde a moverse en la dirección que aumenta s. Un estudio riguroso de estos puntos se dará en el capítulo 3. ■

Hay una distinción técnica entre las palabras *velocidad* y *rapidez*. La velocidad tiene un signo asociado con ella; puede ser positiva o negativa. **Rapidez** se define como el valor absoluto de la velocidad. Por lo tanto, en el ejemplo anterior, la rapidez en $t = 1$ es $|-8| = 8$ centímetros por segundo. El medidor en la mayoría de los automóviles es un *rapidezómetro*, ya que siempre da valores no negativos.

Ahora queremos dar una interpretación física a la segunda derivada d^2s/dt^2. Por supuesto, sólo es la primera derivada de la velocidad. Así, mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, la cual tiene el nombre de **aceleración**. Si se denota por medio de a, entonces

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Medición del tiempo
Si $t = 0$ corresponde al momento presente, entonces $t < 0$ corresponde al pasado, y $t > 0$ al futuro. En muchos problemas, será obvio que sólo estamos interesados con el futuro. Sin embargo, como el enunciado del ejemplo 3 no especifica esto, parece razonable permitir que t tenga tanto valores negativos como positivos.

En el ejemplo 2, $s = 2t^2 - 12t + 8$. Así,

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$$

Esto significa que la velocidad está aumentando a una razón constante de 4 centímetros por segundo cada segundo, que podemos escribir como 4 centímetros por segundo por segundo, o 4 cm/seg^2.

EJEMPLO 3 Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de tal manera que su posición en el instante t está especificada por

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$$

Aquí s se mide en pies y t en segundos

(a) ¿Cuándo es cero la velocidad?
(b) ¿Cuándo es positiva la velocidad?
(c) ¿Cuándo se está moviendo el objeto hacia la izquierda (es decir, en la dirección negativa)?
(d) ¿Cuándo es positiva la aceleración?

SOLUCIÓN

Figura 2

(a) $v = ds/dt = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t - 2)(t - 6)$. Así, $v = 0$ en $t = 2$ y en $t = 6$.
(b) $v > 0$ cuando $(t - 2)(t - 6) > 0$. En la sección 0.2 aprendimos cómo resolver desigualdades cuadráticas. La solución es $\{t: t < 2 \text{ o } t > 6\}$ o en notación de intervalos, $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$; véase la figura 2.

(c) El objeto está moviéndose hacia la izquierda cuando $v < 0$; esto es, cuando $(t-2)(t-6) < 0$. Esta desigualdad tiene como solución el intervalo $(2, 6)$.

(d) $a = dv/dt = 6t - 24 = 6(t-4)$. Por lo tanto, $a > 0$ cuando $t > 4$. El movimiento del punto se muestra de manera esquemática en la figura 3.

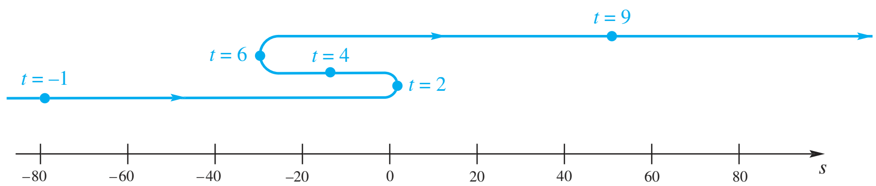


Figura 3

Problemas sobre un cuerpo que cae Si un objeto se lanza directamente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial de s_0 pies, con una velocidad inicial v_0 pies por segundo y si s es su altura por arriba del piso en pies después de t segundos, entonces

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

Esto supone que el experimento se lleva a cabo cerca del nivel del mar y que se desprecia la resistencia del aire. El diagrama en la figura 4 describe la situación que tenemos en mente. Obsérvese que velocidad positiva significa que el objeto está moviéndose hacia arriba.

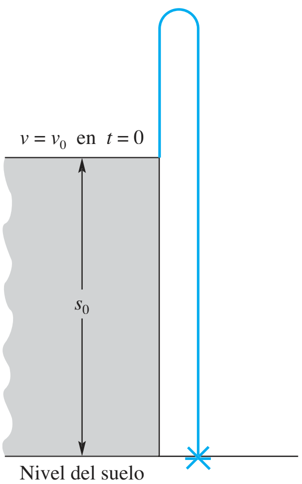


Figura 4

EJEMPLO 4 Desde lo alto de un edificio, de 160 pies de altura, se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

(a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
(b) ¿Cuál es su altura máxima?
(c) ¿Cuándo llega al piso?
(d) ¿A qué velocidad llega al piso?
(e) ¿Cuál es su aceleración en $t = 2$?

SOLUCIÓN Suponga que $t = 0$ corresponde al instante cuando la pelota fue lanzada. Entonces $s_0 = 160$ y $v_0 = 64$ (v_0 es positiva, ya que la pelota se lanzó *hacia arriba*)). Así,

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$
$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$
$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

(a) La pelota alcanzó su altura máxima en el instante en que su velocidad fue cero, esto es, cuando $-32t + 64 = 0$ o cuando $t = 2$ segundos

(b) En $t = 2$, $s = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224$ pies.

(c) La pelota llega al piso cuando $s = 0$, esto es, cuando

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Dividiendo entre -16 se obtiene

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

Entonces, la fórmula cuadrática da

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Sólo la respuesta positiva tiene sentido. Así, la pelota llega al piso en $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5.74$ segundos.

(d) En $t = 2 + \sqrt{14}$, $v = -32\left(2 + \sqrt{14}\right) + 64 \approx -119.73$. Así, la pelota llega al piso con una rapidez de 119.73 pies por segundo.

(e) La aceleración siempre es –32 pies por segundo por segundo. Ésta es la aceleración debida a la gravedad cerca del mar. ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(x)$, entonces la tercera derivada de y con respecto a x puede denotarse por cualquiera de los siguientes cuatro símbolos: _____.

2. Si $s = f(t)$ denota la posición de una partícula en un eje coordenado en el instante t, entonces su velocidad está dada por _____, su rapidez está dada por _____, y su aceleración está dada por _____.

3. Si $s = f(t)$ denota la posición de un objeto en el instante t, entonces el objeto está moviéndose hacia la derecha si _____ .

4. Suponga que un objeto se lanza directamente hacia arriba de modo que su altura s en el instante t está dado por $s = f(t)$. El objeto alcanza su altura máxima cuando ds/dt = _____, después del cual ds/dt _____.

Conjunto de problemas 2.6

En los problemas del 1 al 8 encuentre d^3y/dx^3.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$

2. $y = x^5 + x^4$

3. $y = (3x + 5)^3$

4. $y = (3 - 5x)^5$

5. $y = \operatorname{sen}(7x)$

6. $y = \operatorname{sen}(x^3)$

7. $y = \dfrac{1}{x - 1}$

8. $y = \dfrac{3x}{1 - x}$

En los problemas del 9 al 16 encuentre $f''(2)$.

9. $f(x) = x^2 + 1$

10. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x$

11. $f(t) = \dfrac{2}{t}$

12. $f(u) = \dfrac{2u^2}{5 - u}$

13. $f(\theta) = (\cos \theta\pi)^{-2}$

14. $f(t) = t \operatorname{sen}(\pi/t)$

15. $f(s) = s(1 - s^2)^3$

16. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x - 1}$

17. Sea $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. Por consiguiente, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Damos a $n!$ el nombre de ***n factorial***. Demuestre que $D_x^n(x^n) = n!$

18. Encuentre una fórmula para

$$D_x^n(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)$$

19. Sin hacer cálculo alguno, encuentre cada derivada.

(a) $D_x^4(3x^3 + 2x - 19)$

(b) $D_x^{12}(100x^{11} - 79x^{10})$

(c) $D_x^{11}(x^2 - 3)^5$

20. Encuentre una fórmula para $D_x^n(1/x)$.

21. Si $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$, encuentre el valor de f'' en cada cero de f', esto es, en cada punto c en donde $f'(c) = 0$

22. Suponga que $g(t) = at^2 + bt + c$ y $g(1) = 5, g'(1) = 3$ y $g''(1) = -4$. Encuentre a, b y c.

En los problemas del 23 al 28, un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de acuerdo a la fórmula s =f(t), donde s, la distancia dirigida medida desde el origen, está en pies y t está en segundos. En cada caso, responda las siguientes preguntas (véanse los ejemplos 2 y 3).

(a) ¿Cuáles son $v(t)$ y $a(t)$, la velocidad y la aceleración, en el instante t?

(b) ¿Cuándo está moviéndose el objeto hacia la derecha?

(c) ¿Cuándo está moviéndose hacia la izquierda?

(d) ¿Cuándo es negativa su aceleración?

(e) Dibuje un diagrama esquemático que muestre el movimiento del objeto.

23. $s = 12t - 2t^2$

24. $s = t^3 - 6t^2$

25. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$

26. $s = 2t^3 - 6t + 5$

27. $s = t^2 + \dfrac{16}{t}, t > 0$

28. $s = t + \dfrac{4}{t}, t > 0$

29. Si $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

30. Si $s = \frac{1}{10}(t^4 - 14t^3 + 60t^2)$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

31. Dos objetos se mueven a lo largo de un eje coordenado. Al final de t segundos sus distancias dirigidas desde el origen, en pies, están dadas por $s_1 = 4t - 3t^2$ y $s_2 = t^2 - 2t$, respectivamente.

(a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad?

(b) ¿Cuándo tienen la misma rapidez?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

32. Las posiciones de dos objetos, P_1 y P_2, en un eje coordenado al final de t segundos, están dadas por $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ y $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$, respectivamente. ¿Cuándo tienen la misma velocidad los dos objetos?

33. Un objeto que se lanza directamente hacia arriba está a una altura $s = -16t^2 + 48t + 256$ pies después de t segundos (véase el ejemplo 4).

(a) ¿Cuál es su velocidad inicial?

(b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

C (d) ¿Cuándo llega al suelo?

C (e) ¿Con qué rapidez llega al suelo?

34. Un objeto lanzado directamente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad de 48 pies por segundo es $s = 48t - 16t^2$ pies de altura al final de t segundos.

(a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

(b) Al final de un segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el objeto y en qué dirección?

(c) ¿Cuánto tarda en regresar a su posición original?

C **35.** Un proyectil se dispara directamente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Su altura a los t segundos está dada por $5 = v_0t - 16t^2$ pies. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que el proyectil alcance una altura máxima de 1 milla?

36. Se lanza un objeto directamente hacia abajo desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, cae $s = v_0t + 16t^2$ pies en t segundos. Si cae al océano en 3 segundos a una velocidad de 140 pies por segundo, ¿cuál es la altura del acantilado?

37. Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal, de tal manera que su posición en el instante t está especificada por $s = t^3 - 3t^2 - 24t - 6$. Aquí, s se mide en centímetros y t, en segundos. ¿Cuándo está frenándose el objeto; es decir, cuándo su *rapidez* está disminuyendo?

38. Explique por qué un punto que se mueve a lo largo de una línea está frenándose cuando su velocidad y su aceleración tienen signos opuestos (véase el problema 37).

EXPL **39.** Leibniz obtuvo una fórmula general para $D_x^n(uv)$, donde u y v son funciones de x. Vea si usted puede encontrarla. *Sugerencia:* empiece por considerar los casos $n = 1, n = 2$ y $n = 3$.

40. Utilice la fórmula del problema 39 para encontrar $D_x^4(x^4 \text{ sen } x)$.

GC **41.** Sea $f(x) = x[\text{sen } x - \cos(x/2)]$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x), f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$ en $[0, 6]$ utilizando los mismos ejes.

(b) Evalúe $f'''(2.13)$.

GC **42.** Repita el problema 41 para $f(x) = (x + 1)/(x^2 + 2)$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $f'''(x)$; D_x^3y; d^3y/dx^3; y''' **2.** ds/dt; $|ds/dt|$; d^2s/dt^2
3. $f'(t) > 0$ **4.** 0; <0

2.7 Derivación implícita

En la ecuación

$$y^3 + 7y = x^3$$

no podemos despejar y en términos de x. Sin embargo, aún puede ser el caso de que exista exactamente una y correspondiente a cada x. Por ejemplo, podemos preguntar qué valores de y (si existe alguno) corresponden a $x = 2$. Para responder esta pregunta, debemos resolver

$$y^3 + 7y = 8$$

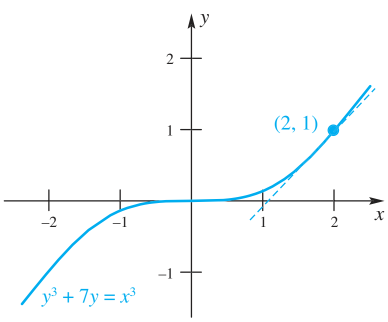


Figura 1

Desde luego, $y = 1$ es una solución, y resulta que $y = 1$ es la *única* solución real. Dado $x = 2$, la ecuación $y^3 + 7y = x^3$ determina un correspondiente valor de y. Decimos que la ecuación define a y como una función **implícita** de x. La gráfica de esta ecuación, que se muestra en la figura 1, por supuesto que se ve como la gráfica de una función derivable. El nuevo elemento es que no tenemos una ecuación de la forma $y = f(x)$. Con base en la gráfica, suponemos que y es alguna función desconocida de x. Si denotamos a esta función como $y(x)$, podemos escribir la ecuación como

$$[y(x)]^3 + 7y(x) = x^3$$

Aunque no tenemos una fórmula para $y(x)$, podemos, a pesar de eso, obtener una relación entre x, $y(x)$ y $y'(x)$, mediante la derivación, respecto a x, de ambos lados de la ecuación. Recordando aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) = \frac{d}{dx}x^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

Obsérvese que nuestra expresión para dy/dx incluye tanto a x como a y, un hecho que con frecuencia es una molestia. Pero si sólo deseamos determinar la pendiente en un punto en donde conocemos ambas coordenadas, no existe dificultad. En (2, 1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{3(1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

La pendiente es $\frac{6}{5}$.

El método que se acaba de ilustrar para determinar dy/dx sin despejar primero la y —de manera explícita de la ecuación dada— en términos de x se denomina **derivación implícita**. Pero, ¿el método es legítimo? ¿Da la respuesta correcta?

Un ejemplo que puede verificarse Para dar alguna evidencia de la validez del método, considérese el ejemplo siguiente, el cual puede resolverse de dos maneras.

EJEMPLO 1 Encuentre dy/dx, si $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

SOLUCIÓN

Método 1 Podemos despejar explícitamente la y de la ecuación dada como sigue:

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Método 2 Derivación implícita Igualamos las derivadas de los dos lados.

$$\frac{d}{dx}(4x^2y - 3y) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

Después de utilizar la regla para el producto en el primer término, obtenemos,

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Estas dos respuestas se ven diferentes. Por un lado, la respuesta obtenida por el método 1 incluye sólo a x, mientras que la respuesta del método 2 incluye a x y a y. Sin embargo, recuerde que de la ecuación original podía despejarse a y en términos de x para obtener $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$. Cuando sustituimos $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$ en la expresión que se acaba de obtener para dy/dx, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\dfrac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$ ■

Algunas dificultades sutiles Si una ecuación en x y y determina una función $y = f(x)$ y si esta función es derivable, entonces el método de la derivación implícita obtendrá una expresión correcta para dy/dx. Pero obsérvese que hay dos grandes *si* en este enunciado.

Considere la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25$$

que determina a las funciones $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Sus gráficas se muestran en la figura 2.

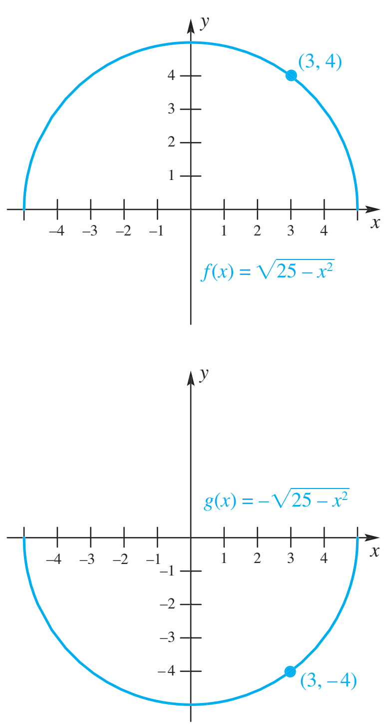


Figura 2

Felizmente, ambas funciones son derivables en $(-5, 5)$. Primero, considérese a f. Satisface

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25$$

Cuando derivamos implícitamente y despejamos a $f'(x)$, obtenemos

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Un tratamiento similar de $g(x)$ produce

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Con fines prácticos, podemos obtener ambos resultados de manera simultánea por medio de la derivación implícita de $x^2 + y^2 = 25$. Ésta da

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } y = f(x) \\ \dfrac{-x}{-\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } y = g(x) \end{cases}$$

Naturalmente, los resultados son idénticos a los que se obtuvieron antes.

Obsérvese que con frecuencia es suficiente saber que $dy/dx = -x/y$ para aplicar nuestros resultados. Supóngase que queremos conocer las pendientes de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ cuando $x = 3$. Para $x = 3$, los correspondientes valores de y son 4 y -4. Las pendientes en (3, 4) y (3, -4), obtenidas por medio de la sustitución en $-x/y$, son $-\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente (véase la figura 2).

Para complicar el asunto, hacemos notar que

$$x^2 + y^2 = 25$$

determina muchas otras funciones. Por ejemplo, considere la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 3 \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{si } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

También satisface $x^2 + y^2 = 25$, ya que $x^2 + [h(x)]^2 = 25$. Pero ni siquiera es continua en $x = 3$, de modo que en realidad no tiene derivada allí (véase la figura 3).

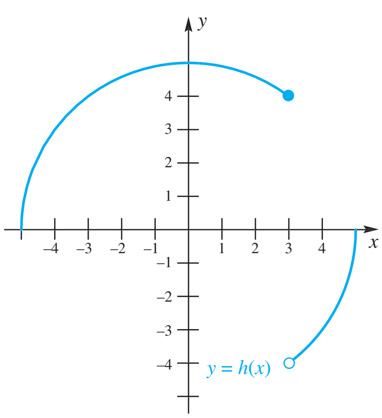


Figura 3

Aunque el tema de funciones implícitas conduce a preguntas técnicas difíciles (tratadas en cálculo avanzado), los problemas que estudiamos tienen soluciones directas.

Más ejemplos En los siguientes ejemplos suponemos que la ecuación dada determina una o más funciones derivables, cuyas derivadas pueden obtenerse por medio de la derivación implícita. Obsérvese que en cada caso empezamos tomando la derivada, respecto de la variable apropiada, de cada lado de la ecuación. Después utilizamos la regla de la cadena conforme la necesitemos.

EJEMPLO 2 Encuentre dy/dx, si $x^2 + 5y^3 = x + 9$

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$$

en el punto (0, 1).

SOLUCIÓN Por simplicidad, usamos la notación y' para dy/dx. Cuando derivamos ambos lados e igualamos los resultados, obtenemos

$$3y^2y' - x(2yy') - y^2 - (\text{sen } xy)(xy' + y) = 0$$
$$y'(3y^2 - 2xy - x \text{ sen } xy) = y^2 + y \text{ sen } xy$$
$$y' = \frac{y^2 + y \text{ sen } xy}{3y^2 - 2xy - x \text{ sen } xy}$$

En $(0, 1)$, $y' = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $(0, 1)$ es

$$y - 1 = \tfrac{1}{3}(x - 0)$$

o

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1$$

■

Otra vez la regla para la potencia Hemos aprendido que $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, donde n es cualquier entero distinto de cero. Ahora extendemos esto para el caso en donde n es cualquier número racional.

Teorema A Regla para la potencia

Sea r cualquier número racional distinto de cero. Entonces, para $x > 0$,

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Si r puede escribirse en su mínima expresión como $r = p/q$, donde q es impar, entonces $D_x(x^r) = rx^{r-1}$ para toda x.

Demostración Como r es racional, r puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros con $q > 0$. Sea

$$y = x^r = x^{p/q}$$

Entonces

$$y^q = x^p$$

y, por la derivación implícita,

$$qy^{q-1}D_xy = px^{p-1}$$

Por consiguiente,

$$D_xy = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}$$
$$= \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Hemos obtenido el resultado deseado; pero para ser honestos, debemos señalar un error en nuestro argumento. En el paso de la derivación implícita supusimos que D_xy existe, esto es, que $y = x^{p/q}$ es derivable. Podemos llenar este hueco, pero como es un trabajo difícil, relegamos la demostración completa al apéndice (sección A.2, teorema C). ■

EJEMPLO 4 Si $y = 2x^{5/3} + \sqrt{x^2 + 1}$, encuentre D_xy.

SOLUCIÓN Mediante el teorema A y la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} D_x y &= 2D_x x^{5/3} + D_x(x^2 + 1)^{1/2} \\ &= 2 \cdot \frac{5}{3}x^{5/3-1} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{1/2-1} \cdot (2x) \\ &= \frac{10}{3}x^{2/3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. De la relación implícita $yx^3 - 3y = 9$ puede despejarse y resultando $y =$ _____.

2. La derivación implícita de $y^3 + x^3 = 2x$ con respecto a x da _____ $+ 3x^2 = 2$.

3. La derivación implícita de $xy^2 + y^3 - y = x^3$ respecto a x da _____ $=$ _____.

4. La regla para la potencia con exponentes racionales dice que $D_x(x^{p/q}) =$ _____. Esta regla, junto con la regla de la cadena, implica que $D_x[(x^2 - 5x)^{5/3}] =$ _____.

Conjunto de problemas 2.7

Suponiendo que en los problemas del 1 al 12 cada ecuación define una función derivable de x, encuentre $D_x y$ por *medio de la derivación implícita.*

1. $y^2 - x^2 = 1$

2. $9x^2 + 4y^2 = 36$

3. $xy = 1$

4. $x^2 + \alpha^2 y^2 = 4\alpha^2$, donde α es una constante.

5. $xy^2 = x - 8$

6. $x^2 + 2x^2y + 3xy = 0$

7. $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$

8. $x^2y = 1 + y^2x$

9. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$

10. $x\sqrt{y + 1} = xy + 1$

11. $xy + \operatorname{sen}(xy) = 1$

12. $\cos(xy^2) = y^2 + x$

En los problemas del 13 al 18 encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto que se indica (véase el ejemplo 3).

13. $x^3y + y^3x = 30$; $(1, 3)$

14. $x^2y^2 + 4xy = 12y$; $(2, 1)$

15. $\operatorname{sen}(xy) = y$; $(\pi/2, 1)$

16. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$; $(1, 0)$

17. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$; $(1, -1)$

18. $\sqrt{y} + xy^2 = 5$; $(4, 1)$

En los problemas del 19 al 32 encuentre dy/dx

19. $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$

20. $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{7/2}$

21. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

22. $y = \sqrt[4]{2x + 1}$

23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$

24. $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$

25. $y = \dfrac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$

26. $y = (3x - 9)^{-5/3}$

27. $y = \sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}$

28. $y = \sqrt{x^2 \cos x}$

29. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 \operatorname{sen} x}}$

30. $y = \sqrt[4]{1 + \operatorname{sen} 5x}$

31. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x)}$

32. $y = \sqrt{\tan^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$

33. Si $s^2t + t^3 = 1$, encuentre ds/dt y dt/ds

34. Si $y = \operatorname{sen}(x^2) + 2x^3$, encuentre dy/dx.

35. Dibuje la gráfica de la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$, y luego encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes que pasan por el origen.

36. Determine la ecuación de la **recta normal** (recta perpendicular a la recta tangente) a la curva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ en $(3, 1)$.

37. Suponga que $xy + y^3 = 2$. Entonces, derivando implícitamente dos veces con respecto a x, por pasos se obtiene:

(a) $xy' + y + 3y^2y' = 0$;

(b) $xy'' + y' + y' + 3y^2y'' + 6y(y')^2 = 0$.

Despeje y' de (a) y sustituya en (b) y después despeje y''

38. Encuentre y'', si $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$ (véase el problema 37).

39. Encuentre y'' en $(2, 1)$, si $2x^2y - 4y^3 = 4$ (véase el problema 37).

40. Utilice derivación implícita dos veces para encontrar y'' en $(3, 4)$, si $x^2 + y^2 = 25$

41. Demuestre que la recta normal a $x^3 + y^3 = 3xy$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

42. Demuestre que las hipérbolas $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ se intersecan en ángulos rectos.

43. Demuestre que las gráficas de $2x^2 + y^2 = 6$ y $y^2 = 4x$ se intersecan en ángulos rectos.

44. Suponga que las curvas C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0) con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, como se muestra en la figura 4. Entonces (véase el problema 40 de la sección 0.7) el ángulo positivo q de C_1 (es decir, desde la recta tangente a C_1 en (x_0, y_0)) a C_2 satisface

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

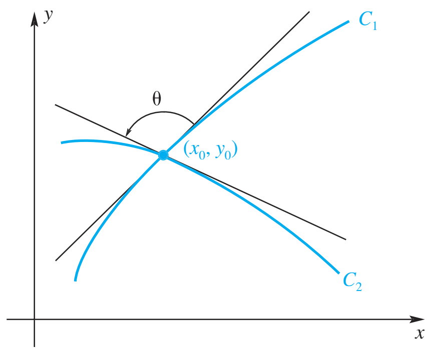


Figura 4

Encuentre los ángulos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ a la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en los dos puntos de intersección.

45. Encuentre el ángulo de la recta $y = 2x$ a la curva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$ en su punto de intersección en el primer cuadrante (véase el problema 44).

46. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posición x y velocidad $v = dx/dt$ satisfacen

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0^2 - x^2)$$

donde v_0, x_0 y k son constantes. Demuestre por medio de derivación implícita que

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

siempre que $v \neq 0$.

47. La curva $x^2 - xy + y^2 = 16$ es una elipse con centro en el origen y con la recta $y = x$ como su eje mayor. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los dos puntos donde la elipse interseca al eje x.

48. Encuentre todos los puntos sobre la curva $x^2y - xy^2 = 2$ en donde la recta tangente es vertical, esto es, en donde $dx/dy = 0$.

≈ **49.** ¿A qué altura h debe estar el foco de la figura 5, si el punto (1.25, 0) está en el borde de la región iluminada?

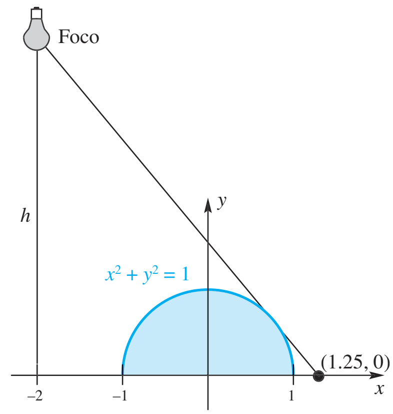


Figura 5

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $9/(x^3 - 3)$
2. $3y^2\frac{dy}{dx}$ **3.** $x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 3x^2$
4. $\frac{p}{q}x^{p/q-1}$; $\frac{5}{3}(x^2 - 5x)^{2/3}(2x - 5)$

2.8 Razones de cambio relacionadas

Si una variable y depende del tiempo t, entonces su derivada dy/dt se denomina **razón de cambio con respecto al tiempo,** o sólo **razón de cambio**. Por supuesto, si y mide la distancia, entonces esta razón de cambio también se llama velocidad. Estamos interesados en una amplia variedad de razones de cambio: la razón a la que fluye agua al interior de un depósito, la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, la razón a la cual el valor de una propiedad está aumentando, etcétera. Si y se da de manera explícita en términos de t, el problema es sencillo; sólo derivamos y luego evaluamos la derivada en el instante requerido.

Puede ser que, en lugar de conocer a y de manera explícita en términos de t, conozcamos una relación que relaciona a y y a otra variable x, y que también conozcamos algo acerca de dx/dt. Aún podemos ser capaces de encontrar dy/dt, ya que dy/dt y dx/dt son **razones de cambio relacionadas** (o razones afines). Por lo regular, esto requiere derivación implícita.

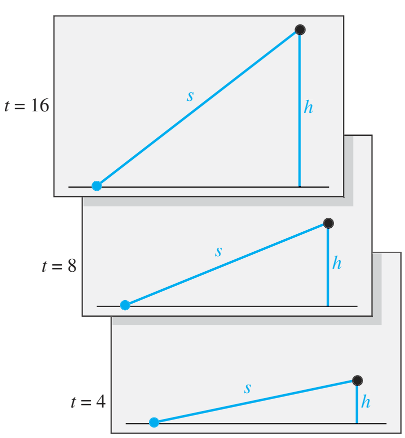


Figura 1

Dos ejemplos sencillos En la preparación de un procedimiento sistemático para la resolución de problemas con tasas de cambio relacionadas, estudiamos dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Se suelta un pequeño globo en un punto a 150 pies alejado de un observador, quien se encuentra en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 8 pies por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando éste se encuentra a 50 pies de altura?

SOLUCIÓN Sea t el número de segundos contados a partir de que se suelta el globo. Sea h la altura del globo y s su distancia al observador (véase la figura 1). Tanto h como s son variables que dependen de t; sin embargo, la base del triángulo (la distancia des-

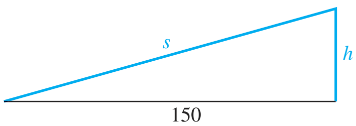


Figura 2

de el observador al punto de lanzamiento) permanece sin cambio conforme t aumenta. La figura 2 muestra las cantidades clave en un diagrama simple.

≈ Antes de avanzar, recordemos un tema estudiado antes en el libro, *estimación de la respuesta*. Observe que, al inicio, s casi no cambia ($ds/dt \approx 0$), pero eventualmente s cambia casi tan rápido como cambia h ($ds/dt \approx dh/dt = 8$). Una estimación de ds/dt cuando $h = 50$ podría ser alrededor de un tercio o un medio de dh/dt, o 3. Si obtenemos una respuesta alejada de este valor, sabremos que hemos cometido un error. Por ejemplo, respuesta tales como 17, o aun 7, obviamente son incorrectas.

Continuemos con la solución exacta. Para enfatizar, preguntamos y respondemos tres preguntas fundamentales.

(a) ¿Qué está dado? *Respuesta:* $dh/dt = 8$.
(b) ¿Qué queremos conocer? *Respuesta:* queremos conocer ds/dt en el instante en que $h = 50$
(c) ¿Cómo están relacionadas s y h? *Respuesta:* las variables s y h cambian con el tiempo (son funciones implícitas de t), pero siempre están relacionadas por medio de la ecuación pitagórica

$$s^2 = h^2 + (150)^2$$

Si derivamos de manera implícita con respecto a t y utilizamos la regla de la cadena, obtenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$$

o

$$s\frac{ds}{dt} = h\frac{dh}{dt}$$

Esta relación se cumple para toda $t > 0$

Ahora, y *no antes de este momento*, pasamos al instante específico cuando $h = 50$. Con base en el Teorema de Pitágoras, vemos que, cuando $h = 50$

$$s = \sqrt{(50)^2 + (150)^2} = 50\sqrt{10}$$

Sustituyendo en $s(ds/dt) = h(dh/dt)$ se obtiene

$$50\sqrt{10}\frac{ds}{dt} = 50(8)$$

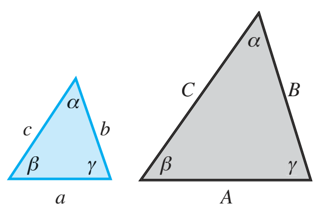
o

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53$$

En el instante cuando $h = 50$, la distancia entre el globo y el observador está aumentando a una velocidad de 2.53 pies por segundo. ■

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.



En geometría aprendimos que razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales. Por ejemplo,

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$$

Este hecho, utilizado en el ejemplo 2, con frecuencia se necesitará en el conjunto de problemas.

EJEMPLO 2 En un tanque cónico se vierte agua a una razón de 8 pies cúbicos por minuto. Si la altura del tanque es de 12 pies y el radio de su abertura circular es de 6 pies, ¿qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando este líquido tiene una profundidad de 4 pies?

SOLUCIÓN Denótese la profundidad del agua con h y sea r el radio correspondiente de la superficie del agua (véase la figura 3).

Se nos *da* que el volumen, V, de agua en el tanque está aumentando a una razón de 8 pies cúbicos por minuto; esto es, $dV/dt = 8$. *Queremos saber* qué tan rápido está elevándose el agua (esto es, dh/dt) en el instante cuando $h = 4$

Necesitamos encontrar una ecuación que relacione a V y a h; después la derivaremos para obtener una relación entre dV/dt y dh/dt. La fórmula para el volumen de agua en el tanque $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, tiene una variable no deseada r; es indeseada porque no conocemos su razón dr/dt. No obstante, por medio de triángulos semejantes (véase el recuadro al margen), tenemos $r/h = 6/12$, o $r = h/2$. Sustituyendo esto en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ da

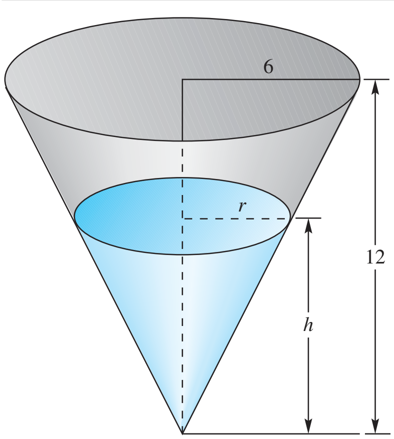


Figura 3

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

Ahora derivamos de manera implícita; para ello, tenemos presente que tanto V como h dependen de t. Obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

Ahora que tenemos una relación entre dV/dt y dh/dt, y no antes, consideramos la situación cuando $h = 4$. Sustituyendo $h = 4$ y $dV/dt = 8$, obtenemos

$$8 = \frac{\pi(4)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

a partir de la cual

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$

Cuando la profundidad del agua es de 4 pies, el nivel del agua está elevándose a 0.637 pies por minuto. ■

Si reflexiona por un momento en el ejemplo 2, usted se da cuenta de que el nivel del agua se elevará cada vez más despacio conforme el tiempo avance. Por ejemplo, cuando $h = 10$

$$8 = \frac{\pi(10)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

de modo que $dh/dt = 32/(100\pi) \approx 0.102$ pies por minuto.

Lo que estamos diciendo en realidad es que la aceleración d^2h/dt^2 es negativa. Podemos calcular una expresión para ella. En cualquier instante t,

$$8 = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{32}{\pi} = h^2\frac{dh}{dt}$$

Si derivamos otra vez implícitamente, obtenemos

$$0 = h^2\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{dh}{dt}\left(2h\frac{dh}{dt}\right)$$

de la cual

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{-2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}{h}$$

Ésta es claramente negativa.

Un procedimiento sistemático Los ejemplos 1 y 2 sugieren el siguiente método para resolver un problema de tasas relacionadas.

Paso 1: Denote mediante t el tiempo transcurrido. Dibuje un diagrama que sea válido para toda $t > 0$. Etiquete las cantidades cuyos valores no cambian conforme t aumenta con sus respectivos valores *constantes* dados. Asigne letras a las cantidades que varían con t y etiquete las secciones convenientes de la figura con estas variables.

Paso 2: Establezca lo que está dado acerca de las variables y qué información se requiere de ellas. Esta información estará en la forma de derivadas respecto a t.

Paso 3: Relacione las variables y escriba una ecuación que sea válida para todos los instantes $t > 0$, no sólo para alguno en particular.

Paso 4: Derive implícitamente, con respecto a t, la ecuación encontrada en el paso 3. La ecuación resultante, que tiene derivadas con respecto a t, es válida para toda $t > 0$

Paso 5: En este momento, y no antes, sustituya en la ecuación encontrada en el paso 4 todos los datos que son válidos *en el instante particular,* por el cual la respuesta al problema es necesaria. Despeje la derivada deseada.

EJEMPLO 3 Un aeroplano que vuela hacia el norte, a 640 millas por hora, pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano que va hacia el este, a 600 millas por hora, está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si los aeroplanos están volando a la misma altitud, ¿qué tan rápido se están separando a la 1:15 P. M.?

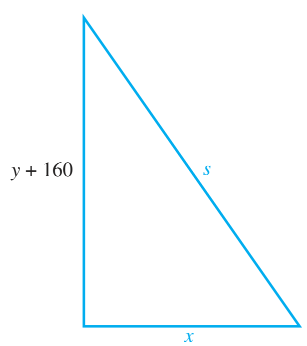


Figura 4

SOLUCIÓN

Paso 1: Denótese con t el número de horas después de las 12:15 P. M., con y a la distancia en millas recorridas por el aeroplano que se dirige al norte, después de las 12:15 P. M., x la distancia que ha volado, después de las 12:15 P. M., el aeroplano que lleva rumbo este y s la distancia entre los aeroplanos. Quince minutos después del mediodía, a las 12:15 P. M., el aeroplano que va hacia el norte habrá volado $\frac{640}{4} = 160$ millas, de modo que la distancia, en el instante t, de la ciudad al aeroplano que va al norte será $y + 160$. (Véase la figura 4.)

Paso 2: Se nos da que, para toda $t > 0$, $dy/dt = 640$ y que $dx/dt = 600$. Queremos conocer ds/dt en $t = 1$, esto es, a la 1:15 P. M.

Paso 3: Por el Teorema de Pitágoras,

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

Paso 4: Al derivar implícitamente con respecto a t y mediante la regla de la cadena, tenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(y + 160)\frac{dy}{dt}$$

o

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y + 160)\frac{dy}{dt}$$

Paso 5: Para toda $t > 0$, $dx/dt = 600$ y $dy/dt = 640$, mientras que en el instante particular $t = 1$, $x = 600$, $y = 640$ y $s = \sqrt{(600)^2 + (640 + 160)^2} = 1000$. Cuando sustituimos estos datos en la ecuación del paso 4, obtenemos

$$1000\frac{ds}{dt} = (600)(600) + (640 + 160)(640)$$

de la cual

$$\frac{ds}{dt} = 872$$

A la 1:15 P. M., los aeroplanos están alejándose a 872 millas por hora

≈ Ahora veamos si nuestra respuesta tiene sentido. Otra vez, véase la figura 4. Claramente, s está aumentando más rápido que lo que aumentan x o y, de modo que ds/dt excede a 640. Por otra parte, seguramente s está aumentando más lentamente que la suma de x y y; es decir, $ds/dt < 600 + 640 = 1240$. Nuestra respuesta, $ds/dt = 872$, es razonable. ■

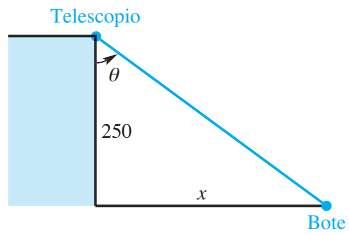


Figura 5

EJEMPLO 4 Una mujer que está ante un acantilado, con un telescopio observa cómo se aproxima un bote de motor a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está a 250 pies por arriba del nivel del agua y si el bote se aproxima a 20 pies por segundo, ¿a qué velocidad está cambiando el ángulo del telescopio cuando el bote está a 250 pies de la playa?

SOLUCIÓN

Paso 1: Dibuje una figura (véase la figura 5) e introduzca variables x y θ, como se muestra.

Paso 2: Nos dan que $dx/dt = -20$; el signo es negativo porque x disminuye con el tiempo. Queremos conocer $d\theta/dt$ en el instante cuando $x = 250$

Paso 3: Por trigonometría

$$\tan \theta = \frac{x}{250}$$

Paso 4: Derivamos implícitamente usando el hecho de que $D_\theta \tan \theta = \sec^2 \theta$ (teorema 2.4B). Obtenemos

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}\frac{dx}{dt}$$

Paso 5: En el instante cuando $x = 250$, θ es $\theta/4$ radianes y $\sec^2\theta = \sec^2(\pi/4) = 2$. Por lo tanto,

$$2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}(-20)$$

o

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

El ángulo está cambiando -0.04 radianes por segundo. El signo negativo muestra que θ está disminuyendo con el tiempo. ■

EJEMPLO 5 Conforme el Sol se pone detrás de un edificio de 120 pies de altura, la sombra del inmueble crece. ¿Qué tan rápido está creciendo la sombra (en pies por segundo) cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 45◦ (o $\pi/4$ radianes).

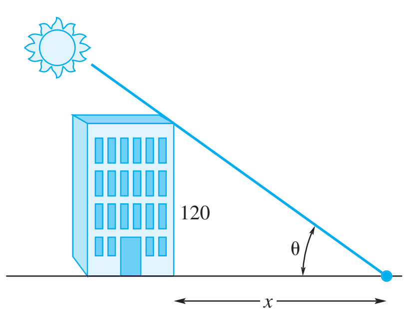


Figura 6

SOLUCIÓN

Paso 1: Denótese con t al tiempo, en segundos, a partir de la medianoche. Sea x la longitud de la sombra en pies y sea θ el ángulo del rayo del Sol. Véase la figura 6.

Paso 2: Como la Tierra da un giro completo una vez cada 24 horas, es decir, 86,400 segundos, sabemos que $d\theta/dt = -2\pi/86{,}400$. (El signo negativo es necesario porque θ *disminuye* conforme el Sol se pone). Queremos conocer dx/dt cuando $\theta = \pi/4$.

Paso 3: La figura 6 indica que las cantidades x y θ satisfa cen $\cot \theta = x/120$, por lo que $x = 120 \cot \theta$

Paso 4: Al derivar ambos lados de $x = 120 \cot \theta$ con respecto a t se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 120(-\csc^2 \theta)\frac{d\theta}{dt} = -120(\csc^2 \theta)\left(-\frac{2\pi}{86{,}400}\right) = \frac{\pi}{360}\csc^2 \theta$$

Paso 5: Cuando $\theta = \pi/4$, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{360}\csc^2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{360}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175\frac{\text{pies}}{\text{sec}}$$

Observe que conforme el Sol se pone, θ disminuye (ya que $d\theta/dt$ es negativa), mientras que la sombra x está aumentando (ya que dx/dt es positiva). ■

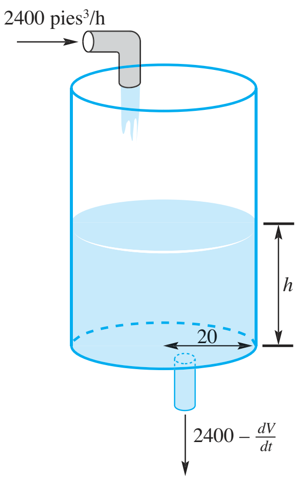


Figura 7

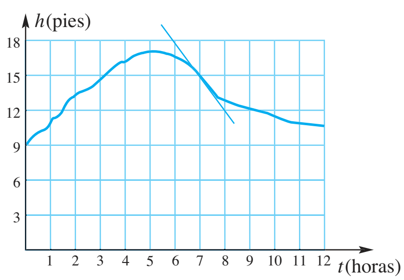


Figura 8

Un problema gráfico de razones relacionadas Con frecuencia, en una situación de la vida real no conocemos una fórmula para cierta función, sino que tenemos una gráfica determinada de manera empírica para ella. Aun así, podemos ser capaces de responder preguntas sobre razones de cambio.

EJEMPLO 6 La ciudad de Webster monitorea la altura del agua en su tanque cilíndrico con un dispositivo de registro automático. El agua se bombea de manera constante al tanque a una velocidad de 2400 pies cúbicos por hora, como se muestra en la figura 7. Durante cierto periodo de 12 horas (empezando a la medianoche), el nivel del agua se elevó y descendió de acuerdo con la gráfica en la figura 8. Si el radio del tanque es de 20 pies, ¿a qué velocidad está utilizándose el agua a las 7:00 A. M.?

SOLUCIÓN Sean t el número de horas transcurridas después de la medianoche, h la altura del agua en el tanque en el instante t y V el volumen del agua en el tanque en el instante t (véase la figura 7). Entonces dV/dt es la razón de entrada menos la razón de salida, de modo que $2400 - dV/dt$ es la velocidad a la que el agua está utilizándose en cualquier instante t. Como la pendiente de la recta tangente en $t = 7$ es aproximadamente -3 (véase la figura 8), concluimos que $dh/dt \approx -3$ en ese instante.

Para un cilindro, $V = \pi r^2 h$, y de este modo

$$V = \pi(20)^2 h$$

de la cual

$$\frac{dV}{dt} = 400\pi \frac{dh}{dt}$$

En $t = 7$,

$$\frac{dV}{dt} \approx 400\pi(-3) \approx -3770$$

Por lo tanto, los residentes de la ciudad de Webster estaban utilizando el agua a una tasa de $2400 + 3770 = 6170$ pies cúbicos por hora a las 7:00 A. M. ■

Revisión de conceptos

1. Preguntar qué tan rápido está cambiando u con respecto al tiempo después de dos horas es equivalente a preguntar el valor de _____ en _____.

2. Un aeroplano con rapidez constante de 400 millas por hora voló directamente sobre un observador. La distancia entre el observador y el aeroplano aumentó a una velocidad creciente y eventualmente se aproxima a una tasa de _____.

3. Si dh/dt disminuye cuando el tiempo aumenta, entonces d^2h/dt^2 es _____.

4. Si está fluyendo agua al interior de un tanque esférico a una razón constante, entonces la altura del nivel del líquido crece a una tasa variable y positiva dh/dt, pero d^2h/dt^2 es _____ hasta que h llega a la mitad de la altura del tanque, después de lo cual d^2h/dt^2 se vuelve _____.

Conjunto de problemas 2.8

1. Cada arista de un cubo variable está aumentando a razón de 3 pulgadas por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando el volumen del cubo cuando una arista es de 12 pulgadas de longitud?

2. Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando éste es de 3 pulgadas, si se sopla aire a la burbuja a una razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo?

≈ **3.** Un aeroplano que vuela horizontalmente a una altitud de una milla pasa directamente sobre un observador. Si la velocidad constante del aeroplano es de 400 millas por hora, ¿qué tan rápido aumenta su distancia respecto del observador 45 segundos más tarde? *Sugerencia:* observe que en 45 segundos $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{80} \text{ hora}\right)$, el aeroplano ha recorrido 5 millas.

4. Un estudiante utiliza un popote para beber de un vaso cónico de papel, cuyo eje es vertical, a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo. Si la altura del vaso es de 10 centímetros y el diámetro de su abertura es de 6 centímetros, ¿qué tan rápido está bajando el nivel del líquido cuando la profundidad del líquido es de 5 centímetros?

≈ **5.** Un aeroplano que vuela hacia el oeste a 300 millas por hora pasa por arriba de la torre de control al mediodía, y un segundo aeroplano que vuela hacia el norte, a la misma altitud pero a 400 millas por hora, pasa por la torre una hora después. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los aeroplanos a las 2:00 p. m.? *Sugerencia:* véase el ejemplo 3.

≈ **6.** Una mujer en un muelle jala una cuerda atada a la proa de un pequeño bote. Si las manos de la mujer están 10 pies por encima del punto en donde la cuerda está sujeta al bote, y si ella está recobrando la cuerda a razón de 2 pies por segundo, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando falta por recogerse 25 pies de cuerda?

≈ **7.** Una escalera de 20 pies está recargada contra un edificio. Si la parte inferior de la escalera se desliza a lo largo del pavimento alejándose directamente del edificio a una velocidad de 1 pie por segundo, ¿qué tan rápido está descendiendo el extremo superior de la escalera, cuando el pie de la escalera está a 5 pies de la pared?

8. Supongamos que un derrame de petróleo se está limpiando por medio de bacterias esparcidas en él, las cuales lo consumen a una razón de 4 pies cúbicos por hora. El derrame de petróleo está modelado por la forma de un cilindro muy delgado cuya altura es el grosor de la capa de petróleo. Cuando el grosor de la capa es de 0.001 pie, el cilindro tiene 500 pies de diámetro. Si la altura disminuye 0.0005 pie por hora, ¿a qué razón cambia el área de la capa?

9. De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo. Si al caer la arena se forma un montón cónico en el piso, cuya altura siempre es $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿qué tan rápido aumenta la altura cuando el montón es de 4 pies de altura? *Sugerencia:* refiérase a la figura 9 y utilice el hecho de que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

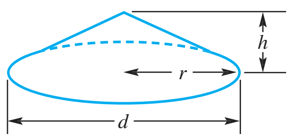


Figura 9

10. Un niño está volando una cometa. Si la cometa está a 90 pies del nivel de la mano del niño y el viento sopla en dirección horizontal a 5 pies por segundo, ¿con que rapidez el niño suelta cordel, cuando ya ha soltado 150 pies de cordel? (Suponga que el cordel permanece en línea recta desde la mano hasta la cometa, en verdad una suposición poco realista).

11. Una alberca es de 40 pies de largo, 20 pies de ancho, 8 pies de profundidad en el extremo más hondo y 3 pies en el extremo menos profundo; el fondo es rectangular (véase la figura 10). Si la alberca se llena al bombear agua a una razón de 40 pies cúbicos por minuto, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pies en el extremo más hondo?

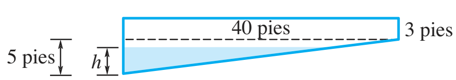


Figura 10

12. Una partícula P se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$, de modo que la abscisa de P está aumentando a razón de 5 unidades por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando la ordenada (coordenada y) cuando $x = 3$?

13. Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas?

14. Dos barcos parten desde el mismo puerto en una isla, uno va en dirección norte a 24 nudos (24 millas náuticas por hora) y el otro con rumbo este a 30 nudos. El barco con dirección norte salió a las 9:00 a. m. y el otro dejó el puerto a las 11:00 A. M. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P. M.? *Sugerencia:* sea $t = 0$ a las 11:00 A. M.

15. La luz de un faro, que se encuentra 1 kilómetro alejado de una playa recta, gira a 2 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa cuando pasa por el punto que se encuentra a $\frac{1}{2}$ kilómetro del punto que está enfrente del faro?

16. Una aficionada a la aviación observa un aeroplano que vuela a una altura constante de 4000 pies hacia un punto que se encuentra directamente sobre de ella. Ella observa que cuando el ángulo de elevación es $\frac{1}{2}$ radián, éste aumenta a una velocidad de $\frac{1}{10}$ radián por segundo. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano?

17. Chris, que mide 6 pies de estatura, camina alejándose de un poste de luz, de 30 pies de altura, a una velocidad de 2 pies por segundo

(a) ¿A qué rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Chris está a 24 pies del poste? ¿A 30 pies?

(b) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de la sombra?

(c) Para seguir el extremo de su sombra, ¿a qué velocidad angular debe levantar sus ojos Chris cuando su sombra es de 6 pies de largo?

18. El vértice del ángulo, θ, opuesto a la base de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud 100 centímetros, aumenta a razón de $\frac{1}{10}$ de radián por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo cuando el ángulo del vértice mide $\pi/6$ radianes? *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$.

19. Un largo paso a desnivel de una autopista pasa por encima de una vía de ferrocarril que está a 100 pies por debajo y forma un ángulo recto con él. Si un automóvil que viaja a 45 millas por hora (66 pies por segundo) está directamente por arriba de la parte delantera de un tren que va a 60 millas por hora (88 pies por segundo), ¿qué tan rápido se están separando 10 segundos después?

20. Se bombea agua a una razón constante de 2 litros por minuto (1 litro = 1000 centímetros cúbicos) a un tanque con forma de cono circular recto truncado. El tanque tiene una altura de 80 centímetros y los radios inferior y superior miden 20 y 40 centímetros, respectivamente (véase la figura 11). ¿A qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del líquido es de 30 centímetros? *Nota:* el volumen, V, de un cono circular recto truncado de altura h y radios inferior y superior a y b es $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

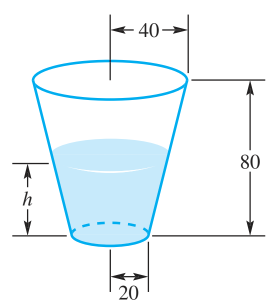


Figura 11

21. Del fondo de un depósito semiesférico, de radio 8 pies, está saliendo agua a razón de 2 pies cúbicos por hora. El depósito estaba lleno en cierto momento. ¿A qué velocidad cambia el nivel del agua cuando su altura es de 3 pies? *Nota:* el volumen de un casquete de altura h en un hemisferio de radio r es $\pi h^2[r - (h/3)]$. (Véase la figura 12).

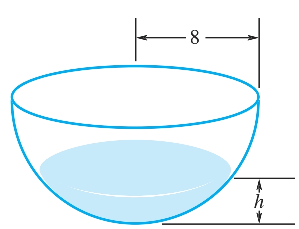


Figura 12

22. Las manecillas de un reloj son de 5 pulgadas (el minutero) y de 4 pulgadas (el horario). ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los extremos de las manecillas a las 3:00?

23. Una bola de acero caerá $16t^2$ pies en t segundos. Dicha pelota se deja caer desde una altura de 64 pies a una distancia horizontal de 10 pies de un poste de luz, que tiene una altura de 48 pies. Cuando la bola llega al suelo, ¿con qué rapidez se está moviendo la sombra de la bola?

24. Resuelva otra vez el ejemplo 6; suponga que el tanque de agua es una esfera de radio de 20 pies. (Véase el problema 21 para el volumen de un casquete esférico).

25. Resuelva otra vez el ejemplo 6; suponga que el tanque de agua tiene forma de un hemisferio superior, con radio de 20 pies. (Véase el problema 21 para el volumen de un casquete esférico).

26. Con respecto al ejemplo 6. Desde la medianoche hasta el mediodía, ¿cuánta agua utilizó, en este periodo de 12 horas, la ciudad de Webster? *Sugerencia:* éste no es un problema de derivación.

27. Una escalera de 18 pies descansa contra un muro vertical de 12 pies y su extremo superior sobresale del muro. El extremo inferior de la escalera se empuja a lo largo del piso y se aleja del muro a 2 pies por segundo.

(a) Encuentre la velocidad vertical del extremo superior de la escalera cuando ésta forma un ángulo de 60° con el piso.

(b) Encuentre la aceleración vertical en ese mismo instante.

28. Una bola esférica de acero permanece en el fondo del depósito del problema 21. Responda la pregunta planteada allí, si la bola tiene radio

(a) 6 pulgadas y (b) 2 pies.

(Suponga que la bola no afecta el flujo que sale del tanque).

29. Una bola de nieve se derrite a una razón proporcional al área de su superficie.

(a) Demuestre que su radio se contrae a una razón constante.

(b) Si en una hora de derrite a $\frac{8}{27}$ de su volumen original, ¿cuánto tardará en derretirse por completo?

30. Un cilindro circular recto con un pistón en un extremo se llena con gas. Su volumen cambia de manera continua a causa del pistón. Si la temperatura del gas se mantiene constante, entonces, por **la Ley de Boyle**, $PV = k$, donde P es la presión (libras por pulgada cuadrada), V es el volumen (pulgadas cúbicas) y k es una constante. La presión es controlada por medio de un dispositivo de registro en un periodo de 10 minutos. El resultado se muestra en la figura 13. De manera aproximada, ¿qué tan rápido estaba cambiando el volumen en $t = 6.5$, si el volumen en ese instante fue de 300 pulgadas cúbicas? (Véase el ejemplo 6.)

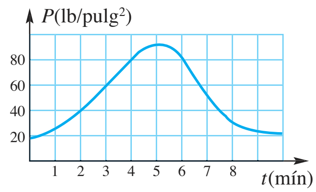


Figura 13

31. Una niña de 5 pies de estatura camina hacia un poste de luz, de 20 pies de altura, a una velocidad de 4 pies por segundo. Su hermano menor, de 3 pies de estatura, la sigue a una distancia constante de 4 pies, directamente atrás de ella (véase la figura 14).

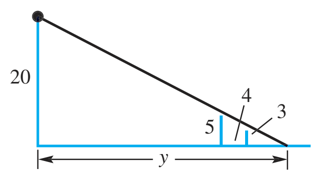


Figura 14

Determine a qué velocidad se mueve el extremo de la sombra, esto es, determine dy/dt. *Nota:* cuando la niña está lejos del poste, ella controla el extremo de la sombra, mientras que su hermano la controla cerca del poste.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** du/dt; $t = 2$ **2.** 400 mi/h **3.** negativa **4.** negativa; positiva

2.9 Diferenciales y aproximaciones

La notación de Leibniz dy/dx ha sido utilizada para la derivada de y respecto a x. La notación d/dx se ha utilizado como un operador para la derivada (de lo que sigue a d/dx) respecto a x. Así, d/dx y D_x son sinónimos. Hasta ahora hemos tratado a dy/dx (o d/dx) como un *solo* símbolo y no hemos tratado de dar significados separados a los símbolos dy y dx. En esta sección daremos significado a dy y a dx.

Sea f una función derivable. Para motivar nuestras definiciones, sea $P(x_0, y_0)$ un punto en la gráfica de $y = f(x)$ como se muestra en la figura 1. Ya que f es derivable,

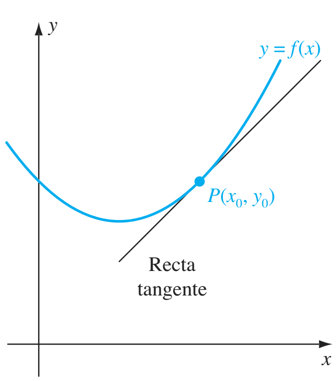


Figura 1

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Así, si Δx es pequeña, el cociente $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x$ será aproximadamente $f'(x_0)$, de modo que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x\, f'(x_0)$$

El lado izquierdo de esta expresión se denomina Δy; éste es el cambio *real* en y cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. El lado derecho se denomina dy, y sirve como una aproximación para Δy. Como lo indica la figura 2, la cantidad dy es igual al cambio en la recta

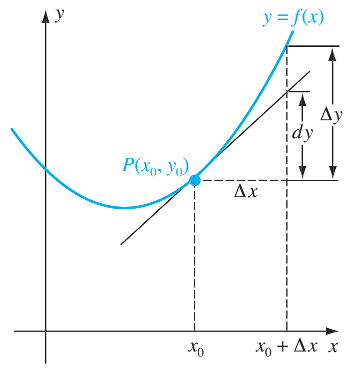


Figura 2

tangente a la curva en P cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. Cuando Δx es pequeña, esperamos que dy será una buena aproximación para Δy, y será sólo una constante por Δx, por lo regular más fácil de calcular.

Definición de diferenciales A continuación están las definiciones formales de las diferenciales dx y dy.

Definición Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable de la variable independiente x.

Δx es un incremento arbitrario en la variable independiente x.

dx, denominada la **diferencial de la variable independiente** x, es igual a Δx.

Δ y Δy es el cambio real en la variable y cuando x cambia de x a $x + \Delta x$; esto es, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

dy, llamada la **diferencial de la variable dependiente** y, se define como $dy = f'(x)dx$.

EJEMPLO 1 Encuentre dy, si

(a) $y = x^3 - 3x + 1$ (b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

(c) $y = \operatorname{sen}(x^4 - 3x^2 + 11)$

SOLUCIÓN Si sabemos cómo calcular derivadas, también sabemos cómo calcular diferenciales. Basta con calcular la derivada y multiplicarla por dx.

(a) $dy = (3x^2 - 3)\,dx$

(b) $dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-1/2}(2x + 3)\,dx = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}dx$

(c) $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) \cdot (4x^3 - 6x)\,dx$ ■

Le pedimos que note dos cosas. Primera, como $dy = f'(x)dx$, la división de ambos lados entre dx da

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y podemos, si lo deseamos, interpretar la derivada como un cociente de dos diferenciales.

Segunda, a cada regla de derivación existe una correspondiente regla de diferenciación, obtenida a partir de la primera "multiplicándola" por dx. Ilustramos las principales reglas en la tabla siguiente.

Distinción entre derivadas y diferenciales

Las derivadas y las diferenciales no son lo mismo. Cuando usted escribe D_xy o dy/dx, está utilizando el símbolo de la derivada; cuando escribe dy, está denotando una diferencial. No sea flojo escribiendo dy cuando quiera referirse a una derivada. Si lo hace, lo llevará a una seria confusión.

Regla de derivación	Regla de diferenciación
1. $\dfrac{dk}{dx} = 0$	1. $dk = 0$
2. $\dfrac{d(ku)}{dx} = k\dfrac{du}{dx}$	2. $d(ku) = k\,du$
3. $\dfrac{d(u + v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	3. $d(u + v) = du + dv$
4. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	4. $d(uv) = u\,dv + v\,du$
5. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$	5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
6. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	6. $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

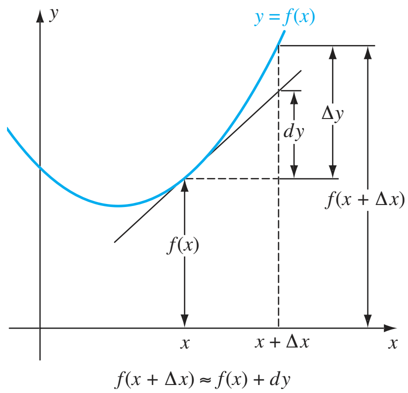


Figura 3

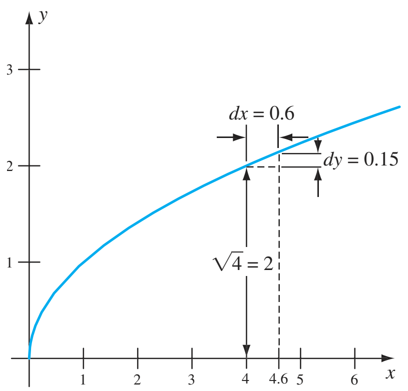


Figura 4

Aproximaciones Las diferenciales desempeñan varios papeles en este texto; pero por ahora su principal uso está en proporcionar aproximaciones. Esto ya lo sugerimos antes.

Suponga $y = f(x)$, como se muestra en la figura 3. Un incremento Δx produce un correspondiente incremento Δy en y, que puede aproximarse con dy. Así, $f(x + \Delta x)$ se aproxima por medio de

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Ésta es la base para las soluciones de todos los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 2 Suponga que necesita buenas aproximaciones para $\sqrt{4.6}$ y $\sqrt{8.2}$, pero que no sirve su calculadora. ¿Qué podría hacer?

SOLUCIÓN Considere la gráfica de $y = \sqrt{x}$ bosquejada en la figura 4. Cuando x cambia de 4 a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4} = 2$ a (aproximadamente) $\sqrt{4} + dy$. Ahora,

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

que, en $x = 4$ y $dx = 0.6$, tiene el valor

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$

De manera análoga, en $x = 9$ y $dx = -0.8$,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} \approx -0.133$$

De aquí que,

$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0.133 = 2.867$$

Observe que, en este caso, tanto dx como dy fueron negativas.

Los valores aproximados 2.15 y 2.867 pueden compararse con los valores verdaderos (a cuatro decimales) de 2.1448 y 2.8636. ■

EJEMPLO 3 Utilice diferenciales para aproximar el aumento en el área de una pompa de jabón cuando su radio aumenta de 3 pulgadas a 3.025 pulgadas.

SOLUCIÓN El área de una pompa de jabón esférica está dada por $A = 4\pi r^2$. Podemos aproximar el cambio exacto, ΔA, por medio de la diferencial dA, donde

$$dA = 8\pi r\,dr$$

En $r = 3$ y $dr = \Delta r = 0.025$,

$$dA = 8\pi(3)(0.025) \approx 1.885 \text{ pulgadas cuadradas}$$ ■

Estimación de errores A continuación se presenta un problema común en la ciencia. Un investigador mide cierta variable x y tiene un valor x_0, con un posible error de tamaño $\pm\Delta x$. Después, el valor x_0 es utilizado para calcular un valor y_0, para y que depende de x. El valor de y_0 está contaminado por el error en x, pero, ¿qué tanto? El procedimiento estándar es estimar este error por medio de diferenciales.

EJEMPLO 4 La arista de un cubo se midió como 11.4 centímetros con un posible error de ± 0.05 centímetros. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error en este valor.

SOLUCIÓN El volumen V de un cubo de arista x es $V = x^3$. Por lo tanto, $dV = 3x^2dx$. Si $x = 11.4$ y $dx = 0.05$, entonces $V = (11.4)^3 \approx 1482$ y

$$\Delta V \approx dV = 3(11.4)^2(0.05) \approx 19$$

Por lo tanto, podríamos reportar el volumen del cubo como 1482 ±19 centímetros cúbicos. ■

La cantidad ΔV en el ejemplo 4 se denomina **error absoluto.** Otra medida del error es el **error relativo**, que se obtiene dividiendo el error absoluto entre el volumen total. Podemos aproximar el error relativo $\Delta V/V$ por dV/V. En el ejemplo 4, el error relativo es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{19}{1482} \approx 0.0128$$

Con frecuencia, el error relativo se expresa en términos de porcentaje. Así, decimos que para el cubo del ejemplo 4 el error relativo es aproximadamente 1.28%.

EJEMPLO 5 La Ley de Poiseuille para el flujo de la sangre dice que el volumen que fluye por una arteria es proporcional a la cuarta potencia del radio, esto es, $V = kR^4$. ¿En cuánto debe aumentarse el radio para aumentar el flujo de la sangre en 50%?

SOLUCIÓN La diferencial satisface $dV = 4kR^3\,dR$. El cambio relativo en el volumen es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4kR^3\,dR}{kR^4} = 4\frac{dR}{R}$$

así que para 50% de cambio en el volumen,

$$0.5 \approx \frac{dV}{V} = 4\frac{dR}{R}$$

El cambio relativo en R debe ser

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R} \approx \frac{0.5}{4} = 0.125$$

Por lo tanto, sólo 12.5% de aumento en el radio de una arteria aumentará el flujo de la sangre en alrededor de 50%. ■

Aproximación lineal Si f es diferenciable en a, entonces de la forma punto-pendiente de la recta, la recta tangente a f en $(a, f(a))$ está dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. La función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se denomina **aproximación lineal** a la función f en a, y con frecuencia es una muy buena aproximación para f cuando x es cercana a a.

EJEMPLO 6 Encuentre y dibuje la aproximación lineal a $f(x) = 1 + \operatorname{sen}(2x)$ en $x = \pi/2$

SOLUCIÓN: La derivada de f es $f'(x) = 2\cos(2x)$, de modo que la aproximación lineal es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) \\ &= (1 + \operatorname{sen}\pi) + (2\cos\pi)(x - \pi/2) \\ &= 1 - 2(x - \pi/2) = (1 + \pi) - 2x \end{aligned}$$

La figura 5a muestra la gráfica de la función f y la gráfica de la aproximación lineal L en el intervalo $[0, \pi]$. Podemos ver que la aproximación es buena cerca de $\pi/2$, pero la aproximación no es buena cuando se aleja de $\pi/2$. Las figuras 5b y 5c también muestran las gráficas de las funciones L y f en intervalos cada vez más pequeños. Para valores de x cercanos a $\pi/2$, vemos que la aproximación lineal es muy parecida a la función f. ■

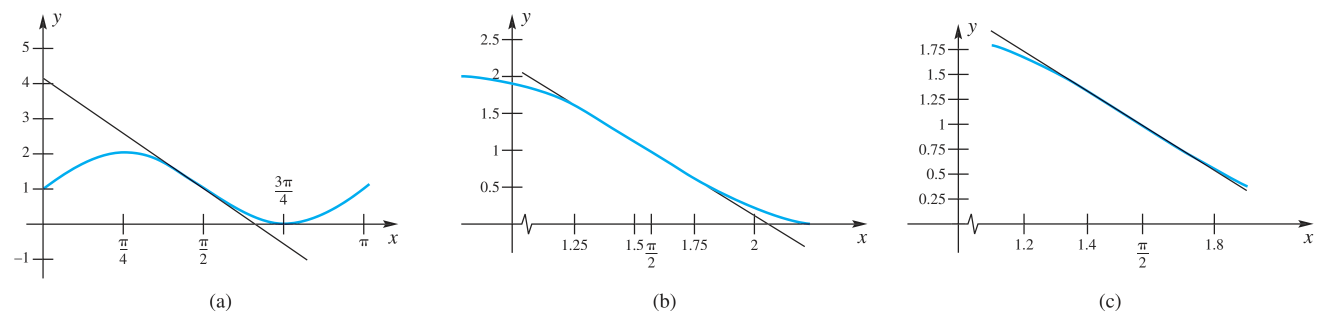


Figura 5

Revisión de conceptos

1. Sea $y = f(x)$. La diferencial de y en términos de dx está definida por medio de dy_____.

2. Considere la curva $y = f(x)$ y suponga que a x se le da un incremento Δx. El cambio correspondiente en y sobre la curva está denotado por _____, mientras que el correspondiente cambio en y sobre la recta tangente está denotado por _____.

3. Podemos esperar que dy sea una buena aproximación a Δy, siempre que _____.

4. Sobre la curva $y = \sqrt{x}$, debemos esperar que dy sea cercana a Δy, pero siempre _____ que Δy. Sobre la curva $y = x^2, x \geq 0$, debemos esperar que dy sea _____ que Δy.

Conjunto de problemas 2.9

En los problemas del 1 al 8 encuentre dy.

1. $y = x^2 + x - 3$

2. $y = 7x^3 + 3x^2 + 1$

3. $y = (2x + 3)^{-4}$

4. $y = (3x^2 + x + 1)^{-2}$

5. $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3$

6. $y = (\tan x + 1)^3$

7. $y = (7x^2 + 3x - 1)^{-3/2}$

8. $y = \left(x^{10} + \sqrt{\operatorname{sen} 2x}\right)^2$

9. Si $s = \sqrt{(t^2 - \cot t + 2)^3}$, encuentre ds.

10. Sea $y = f(x) = x^3$. Encuentre el valor de dy en cada caso.

(a) $x = 0.5, dx = 1$ (b) $x = -1, dx = 0.75$

11. Para la función definida en el problema 10, con cuidado haga un dibujo de la gráfica de f para $-1.5 \leq x \leq 1.5$ y las tangentes a la curva en $x = 0.5$ y $x = -1$; en este dibujo marque dy y dx para cada uno de los conjuntos de datos dados en las partes (a) y (b).

12. Sea $y = 1/x$. Encuentre el valor de dy en cada caso.

(a) $x = 1, dx = 0.5$ (b) $x = -2, dx = 0.75$

13. Para la función definida en el problema 12, con cuidado haga un dibujo (como en el problema 11), para la parte (a) $0 < x \leq 3$ y para la parte (b) $-3 \leq x < 0$.

$\boxed{\text{C}}$ **14.** Para los datos del problema 10 encuentre los cambios reales en y, es decir, Δy.

$\boxed{\text{C}}$ **15.** Para los datos del problema 12, encuentre los cambios reales en y, es decir, Δy.

16. Si $y = x^2 - 3$, encuentre los valores de Δy y dy en cada caso.

(a) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.5$

$\boxed{\text{C}}$ (b) $x = 3$ y $dx = \Delta x = -0.12$

17. Si $y = x^4 + 2x$, encuentre los valores de Δy y dy en cada caso.

(a) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 1$

$\boxed{\text{C}}$ (b) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.005$.

En los problemas del 18 al 20 utilice diferenciales para aproximar los números dados (véase el ejemplo 2). Compárelos con los valores obtenidos con una calculadora

18. $\sqrt{402}$

19. $\sqrt{35.9}$

20. $\sqrt[3]{26.91}$

$\boxed{\text{C}}$ **21.** Aproxime el volumen del material en un cascarón esférico con radio interno de 5 centímetros y radio externo de 5.125 centímetros (véase el ejemplo 3).

$\boxed{\text{C}}$ **22.** Las seis caras de una caja cúbica metálica tienen un grosor de 0.25 pulgadas y el volumen del interior de la caja es de 40 pulgadas cúbicas. Utilice diferenciales para aproximar el volumen de metal empleado para fabricar la caja.

23. El diámetro exterior de un cascarón esférico delgado es de 12 pies. Si el cascarón tiene un grosor de 0.3 pulgadas, utilice diferenciales para aproximar el volumen de la región interior.

24. El interior de un tanque cilíndrico abierto es de 12 pies de diámetro y de 8 pies de profundidad. El fondo es de cobre y los lados son de acero. Utilice diferenciales para encontrar, de manera aproximada, cuántos galones de pintura a prueba de agua es necesaria para aplicar un capa de 0.05 pulgadas a la parte de acero del interior del tanque (1 galón $\approx$ 231 pulgadas cúbicas).

25. Suponga que el ecuador es un círculo cuyo radio es de aproximadamente 4000 millas, ¿en cuánto excedería al ecuador un círculo concéntrico y coplanar a él, si cada punto en él estuviese 2 pies alejado del ecuador? Utilice diferenciales.

26. El periodo de un péndulo simple, de longitud L pies, está dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ segundos. Supongamos que g, la aceleración debida a la gravedad en (o muy cerca de) la superficie de la Tierra, es de 32 pies por segundo por segundo. Si el péndulo es el de un reloj que se mantiene sincronizado cuando $L = 4$ pies, ¿cuánto tiempo se adelantará el reloj en 24 horas, si la longitud del péndulo se disminuye a 3.97 pies?

27. El diámetro de una esfera se mide y es de 20 ± 0.1 centímetros. Calcule el volumen y estime el error absoluto y el error relativo (véase el ejemplo 4).

28. Un rodillo cilíndrico tiene exactamente 12 pulgadas de largo y su diámetro se estima en 6 ± 0.005 pulgadas. Calcule su volumen con una estimación para el error absoluto y para el error relativo.

C **29.** El ángulo θ entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles mide 0.53 ± 0.005 radianes. Los dos lados iguales miden exactamente 151 centímetros de largo. Calcule la longitud del tercer lado con una estimación para los errores absoluto y relativo.

C **30.** Calcule el área del triángulo del problema 29 con una estimación para los errores absoluto y relativo. *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$.

31. Puede demostrarse que si $|d^2y/dx^2| \leq M$ en un intervalo cerrado con c y $c + \Delta x$ como puntos extremos, entonces

$$|\Delta y - dy| \leq \tfrac{1}{2}M(\Delta x)^2$$

Utilizando diferenciales, encuentre el cambio en $y = 3x^2 - 2x + 11$, cuando x aumenta de 2 a 2.001 y luego proporcione una cota para el error que ha cometido por usar diferenciales.

32. Suponga que f es una función que satisface $f(1) = 10$ y $f'(1.02) = 12$. Utilice esta información para aproximar $f(1.02)$.

33. Suponga que f es una función que satisface $f(3) = 8$ y $f'(3.05) = \frac{1}{4}$. Utilice esta información para aproximar $f(3.05)$.

34. Una copa cónica, de 10 centímetros de altura y 8 centímetros de ancho en la parte superior, se llena con agua hasta una profundidad de 9 centímetros. Un cubo de hielo de 3 centímetros de lado está a punto de dejarse caer en la copa. Utilice diferenciales para decidir si se derramará la copa.

35. Un tanque tiene forma cilíndrica con extremos semiesféricos. Si la parte cilíndrica tiene una longitud de 100 centímetros de largo y un diámetro exterior de 20 centímetros, ¿aproximadamente cuánta pintura se requerirá para cubrir el exterior del tanque con una capa de 1 milímetro de espesor?

C **36.** La teoría especial de la relatividad de Einstein dice que la masa m está relacionada con la velocidad v por medio de la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. Utilice diferenciales para determinar el aumento porcentual en la masa de un objeto cuando su velocidad aumenta de $0.9c$ a $0.92c$.

En los problemas del 37 al 44 determine la aproximación lineal a las funciones dadas en los puntos especificados. Dibuje la función y la aproximación lineal en el intervalo que se indica.

37. $f(x) = x^2$ en $a = 2$, $[0, 3]$

38. $g(x) = x^2 \cos x$ en $a = \pi/2$, $[0, \pi]$

39. $h(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$, $[-\pi, \pi]$

40. $F(x) = 3x + 4$ en $a = 3$, $[0, 6]$

41. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $a = 0$, $[-1, 1]$

42. $g(x) = x/(1 - x^2)$ en $a = \frac{1}{2}$, $[0, 1)$

43. $h(x) = x \sec x$ en $a = 0$, $(-\pi/2, \pi/2)$

44. $G(x) = x + \operatorname{sen} 2x$, en $a = \pi/2$, $[0, \pi]$

45. Determine la aproximación lineal para $f(x) = mx + b$ en una a arbitraria. ¿Cuál es la relación entre $f(x)$ y $L(x)$?

46. Demuestre que para toda $a > 0$ la aproximación lineal $L(x)$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en a satisface $f(x) \leq L(x)$ para toda $x > 0$.

47. Demuestre que para cada a la aproximación lineal $L(x)$ para la función $f(x) = x^2$ en a satisface $L(x) \leq f(x)$ para toda x.

EXPL **48.** Determine una aproximación lineal a $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ en $x = 0$, en donde α es cualquier número. Para distintos valores de α, grafique $f(x)$ y su aproximación lineal $L(x)$. ¿Para qué valores de α la aproximación siempre sobreestima a $f(x)$? ¿Para qué valores de α la aproximación lineal siempre subestima a $f(x)$?

EXPL **49.** Suponga que f es diferenciable. Si utilizamos la aproximación $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$, el error es $\varepsilon(h) = f(x + h) - f(x) - f'(x)h$. Demuestre que

(a) $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ y (b) $\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f'(x)dx$ **2.** $\Delta y, dy$ **3.** Δx es pequeña **4.** más grande; más pequeña

2.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. La recta tangente a la curva en un punto no puede cruzar a la curva en ese punto.

2. La recta tangente puede tocar a la curva en un solo punto.

3. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^4$ es diferente en cada punto de la curva.

4. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \cos x$ es diferente en cada punto de la curva.

5. Es posible que la velocidad de un objeto esté aumentando, mientras que su rapidez esté disminuyendo.

6. Es posible que la rapidez de un objeto esté aumentando, mientras que su velocidad esté disminuyendo.

7. Si la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

8. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x, entonces $f(x) = g(x)$ para toda x.

9. Si $g(x) = x$, entonces $f'(g(x)) = D_x f(g(x))$.

10. Si $y = \pi^5$, entonces $D_x y = 5\pi^4$.

11. Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

12. La gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente en $x = 0$, aunque $D_x y$ no existe en ese punto.

13. La derivada de un producto siempre es el producto de las derivadas.

14. Si la aceleración de un objeto es negativa, entonces su velocidad está disminuyendo.

15. Si x^3 es un factor de la función derivable $f(x)$, entonces x^2 es un factor de su derivada.

16. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en $(1, 1)$ es $y - 1 = 3x^2(x - 1)$.

17. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $D_x^2 y = f(x)g''(x) + g(x)f''(x)$.

18. Si $y = (x^3 + x)^8$, entonces $D_x^{25} y = 0$.

19. La derivada de un polinomio es un polinomio.

20. La derivada de una función racional es una función racional.

21. Si $f'(c) = g'(c) = 0$ y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

22. La expresión

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x - \pi/2}$$

es la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x = \pi/2$.

23. El operador D^2 es lineal.

24. Si $h(x) = f(g(x))$, donde f y g son derivables, entonces $g'(c) = 0$ implica que $h'(c) = 0$.

25. Si $f'(2) = g'(2) = g(2) = 2$, entonces $(f \circ g)'(2) = 4$.

26. Si f es derivable y creciente, y además si $dx = \Delta x > 0$, entonces $\Delta y > dy$

27. Si el radio de una esfera está aumentando a razón de 3 pies por segundo, entonces su volumen está creciendo 27 pies cúbicos por segundo.

28. Si el radio de un círculo aumenta 4 pies por segundo, entonces su circunferencia aumenta 8π pies por segundo.

29. $D_x^{n+4}(\operatorname{sen} x) = D_x^n(\operatorname{sen} x)$ para todo entero positivo n.

30. $D_x^{n+3}(\cos x) = -D_x^n(\operatorname{sen} x)$ para todo entero positivo n.

31. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{3x} = \frac{1}{3}$.

32. Si $s = 5t^3 + 6t - 300$ proporciona la posición de un objeto, en el instante t, en un eje coordenado horizontal, entonces ese objeto siempre se está moviendo hacia la derecha (la dirección en que aumenta s).

33. Si se está bombeando aire a un globo esférico de hule a una velocidad constante de 3 pulgadas cúbicas por segundo, entonces el radio aumentará, pero a una razón cada vez menor.

34. Si se bombea agua a un tanque esférico de radio fijo, a una tasa constante de 3 galones por segundo, la altura del agua en el tanque aumentará más rápidamente cuando el tanque esté próximo a ser llenado.

35. Si se cometió un error Δr al medir el radio de una esfera, el correspondiente error en el volumen calculado será aproximadamente $S \cdot \Delta r$, donde S es el área de la superficie de la esfera.

36. Si $y = x^5$, entonces $dy \geq 0$.

37. La aproximación lineal para la función definida por $f(x) = \cos x$ en $x = 0$ tiene pendiente positiva.

Problemas de examen

1. Utilice $f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)]/h$ para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x^3$ (b) $f(x) = 2x^5 + 3x$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 2}$

(e) $f(x) = \sqrt{3x}$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ (h) $f(x) = \cos \pi x$

2. Utilice $g'(x) = \displaystyle\lim_{t \to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x}$ para encontrar $g'(x)$ en cada caso.

(a) $g(x) = 2x^2$ (b) $g(x) = x^3 + x$

(c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(e) $g(x) = \sqrt{x}$ (f) $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$

(g) $g(x) = \sqrt{x^3 + C}$ (h) $g(x) = \cos 2x$

3. El límite dado es una derivada, pero ¿de qué función y en cuál punto?

(a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h) - 3}{h}$ (b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{4(2 + h)^3 - 4(2)^3}{h}$

(c) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(1 + \Delta x)^3} - 1}{\Delta x}$ (d) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + \Delta x)}{\Delta x}$

(e) $\displaystyle\lim_{t \to x} \frac{4/t - 4/x}{t - x}$ (f) $\displaystyle\lim_{t \to x} \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 3t}{t - x}$

(g) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\tan(\pi/4 + h) - 1}{h}$ (h) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5 + h}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{1}{h}$

4. Utilice la gráfica de $s = f(t)$ de la figura 1 para aproximar cada una de las siguientes.

(a) $f'(2)$ (b) $f'(6)$

(c) v_{prom} en $[3, 7]$ (d) $\dfrac{d}{dt} f(t^2)$ en $t = 2$

(e) $\dfrac{d}{dt}[f^2(t)]$ en $t = 2$ (f) $\dfrac{d}{dt}(f(f(t)))$ en $t = 2$

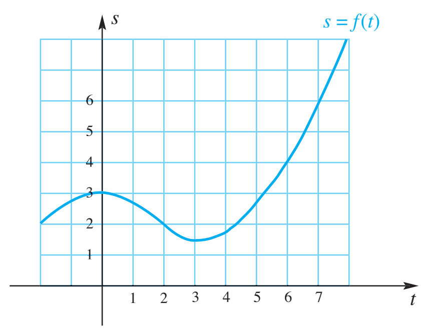


Figura 1

En los problemas del 5 al 29 encuentre la derivada que se indica por medio de las reglas que hemos desarrollado.

5. $D_x(3x^5)$

6. $D_x(x^3 - 3x^2 + x^{-2})$

7. $D_z(z^3 + 4z^2 + 2z)$

8. $D_x\left(\dfrac{3x - 5}{x^2 + 1}\right)$

9. $D_t\left(\dfrac{4t - 5}{6t^2 + 2t}\right)$

10. $D_x^2(3x + 2)^{2/3}$

11. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x^2 - 2}{x^3 + x}\right)$

12. $D_t\left(t\sqrt{2t + 6}\right)$

13. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$

14. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x}}$

15. $D_\theta^2(\operatorname{sen} \theta + \cos^3 \theta)$

16. $\dfrac{d}{dt}[\operatorname{sen}(t^2) - \operatorname{sen}^2(t)]$

17. $D_\theta(\operatorname{sen}(\theta^2))$

18. $\dfrac{d}{dx}(\cos^3 5x)$

19. $\frac{d}{d\theta}[\text{sen}^2(\text{sen}(\pi\theta))]$

20. $\frac{d}{dt}[\text{sen}^2(\cos 4t)]$

21. $D_\theta \tan 3\theta$

22. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen } 3x}{\cos 5x^2}\right)$

23. $f'(2)$ si $f(x) = (x^2 - 1)^2(3x^3 - 4x)$

24. $g''(0)$ si $g(x) = \text{sen } 3x + \text{sen}^2 3x$

25. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{\sec x^2}\right)$

26. $D_t\left(\frac{4t \text{ sen } t}{\cos t - \text{sen } t}\right)$

27. $f'(2)$ si $f(x) = (x - 1)^3(\text{sen } \pi x - x)^2$

28. $h''(0)$ si $h(t) = (\text{sen } 2t + \cos 3t)^5$

29. $g'''(1)$ si $g(r) = \cos^3 5r$

En los problemas del 30 al 33 suponga que todas las funciones dadas son derivables y encuentre la derivada que se indica.

30. $f'(t)$ si $f(t) = h(g(t)) + g^2(t)$

31. $G''(x)$ si $G(x) = F(r(x) + s(x)) + s(x)$

32. Si $F(x) = Q(R(x))$, $R(x) = \cos x$, y $Q(R) = R^3$, encuentre $F'(x)$.

33. Si $F(z) = r(s(z))$, $r(x) = \text{sen } 3x$, y $s(t) = 3t^3$, encuentre $F'(z)$.

34. Encuentre las coordenadas del punto en la curva $y = (x - 2)^2$ donde exista una recta tangente que sea perpendicular a la recta $2x - y + 2 = 0$

35. Un globo esférico se expande debido al calor del Sol. Encuentre la tasa de cambio del volumen del globo con respecto a su radio cuando el radio es de 5 metros.

36 Si el volumen del globo del problema 35 está aumentando a una razón constante de 10 metros cúbicos por hora, ¿a qué velocidad aumenta su radio cuando éste es de 5 metros?

37. Un abrevadero de 12 pies de largo tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles (con base en la parte superior) de 4 pies de profundidad y 6 pies de ancho. Si el abrevadero se está llenando con agua a una razón de 9 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad está elevándose el nivel del agua cuando el agua tiene 3 pies de profundidad?

38. Desde el suelo, un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Su altura s al final de t segundos es aproximadamente $s = 128t - 16t^2$ pies.

(a) ¿Cuándo alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?

(b) ¿Cuándo llega al suelo y con qué velocidad?

39. Un objeto se mueve sobre un eje coordenado horizontal. Su distancia dirigida, s, desde el origen al final de t segundos es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ pies.

(a) ¿Cuando se está moviendo el objeto hacia la izquierda?

(b) ¿Cuál es su aceleración cuando su velocidad es cero?

(c) ¿Cuándo es positiva su aceleración?

40. En cada caso encuentre $D_x^{20}y$.

(a) $y = x^{19} + x^{12} + x^5 + 10$
(b) $y = x^{20} + x^{19} + x^{18}$
(c) $y = 7x^{21} + 3x^{20}$
(d) $y = \text{sen } x + \cos x$
(e) $y = \text{sen } 2x$
(f) $y = \frac{1}{x}$

41. En cada caso, encuentre dy/dx.

(a) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$
(b) $xy^2 + yx^2 = 1$
(c) $x^3 + y^3 = x^3y^3$
(d) $x \text{ sen}(xy) = x^2 + 1$
(e) $x \tan(xy) = 2$

42. Demuestre que las tangentes a las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ en $(1, 2)$ son perpendiculares entre sí. *Sugerencia:* use derivación implícita.

43. Sea $y = \text{sen}(\pi x) + x^2$. Si x cambia de 2 a 2.01, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

44. Sea $xy^2 + 2y(x + 2)^2 + 2 = 0$.

(a) Si x cambia de -2.00 a -2.01 y $y > 0$, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

(b) Si x cambia de -2.00 a -2.01 y $y < 0$, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

45. Suponga que $f(2) = 3, f'(2) = 4, f''(2) = -1, g(2) = 2$ y $g'(2) = 5$. Encuentre cada valor..

(a) $\frac{d}{dx}[f^2(x) + g^3(x)]$ en $x = 2$

(b) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ en $x = 2$

(c) $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$ en $x = 2$

(d) $D_x^2[f^2(x)]$ en $x = 2$

≈ **46.** Una escalera de 13 pies está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se jala alejándola del muro a una velocidad constante de 2 pies por segundo, ¿a qué velocidad desciende, en el muro, la parte superior de la escalera cuando se encuentra 5 pies por encima del nivel del suelo?

≈ **47.** Un aeroplano se eleva, formando un ángulo de 15° con la horizontal. ¿A qué velocidad está ganando altura si su velocidad es de 400 millas por hora?

48. Dado que $D_x|x| = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, encuentre una fórmula para

(a) $D_x(|x|^2)$
(b) $D_x^2|x|$
(c) $D_x^3|x|$
(d) $D_x^2(|x|^2)$

49. Dado que $D_t|t| = \frac{|t|}{t}$, $t \neq 0$, encuentre una fórmula para

(a) $D_\theta|\text{sen } \theta|$
(b) $D_\theta|\cos \theta|$

50. Encuentre la aproximación lineal para las siguientes funciones en los puntos dados..

(a) $\sqrt{x + 1}$ en $a = 3$
(b) $x \cos x$ at $a = 1$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 resuelva las desigualdades dadas. (Véase la sección 0.2.)

1. $(x - 2)(x - 3) < 0$

2. $x^2 - x - 6 > 0$

3. $x(x - 1)(x - 2) \leq 0$

4. $x^3 + 3x^2 + 2x \geq 0$

5. $\dfrac{x(x - 2)}{x^2 - 4} \geq 0$

6. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2} > 0$

En los problemas del 7 al 14 determine la derivada $f'(x)$ de la función dada.

7. $f(x) = (2x + 1)^4$

8. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

9. $f(x) = (x^2 - 1) \cos 2x$

10. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x}$

11. $f(x) = \tan^2 3x$

12. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$

14. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$

15. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \tan^2 x$, en donde la recta tangente es horizontal.

16. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = x + \operatorname{sen} x$, en donde la recta tangente es horizontal.

17. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = x + \operatorname{sen} x$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 2 + x$.

18. Una caja rectangular se fabrica a partir de una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo y 9 pulgadas de ancho; para ello, se cortan cuadrados iguales a partir de las cuatro esquinas y los lados se doblan hacia arriba, como en la figura 1. Si x es la longitud del lado de uno de los cuadrados que se cortan, ¿cuál es el volumen de la caja resultante?

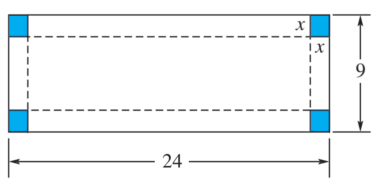


Figura 1

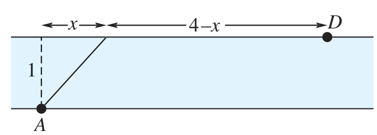


Figura 2

19. Andy quiere cruzar un río que tiene un ancho de 1 kilómetro a fin de alcanzar un punto 4 kilómetros río abajo. (Véase la figura 2.) Él puede nadar a 4 kilómetros por hora y correr a 10 kilómetros por hora. Suponiendo que él inicia nadando y que lo hace hacia un punto a x kilómetros río abajo del punto A de donde parte, ¿cuánto tardará en llegar a su destino D?

20. Sea $f(x) = x - \cos x$.

(a) ¿La ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = \pi$? ¿Cómo lo sabe?

(b) Determine la ecuación de la recta tangente en $x = \pi/2$.

(c) La recta tangente de la parte (b), ¿en dónde interseca al eje x?

21. Determine una función cuya derivada sea

(a) $2x$ (b) $\operatorname{sen} x$ (c) $x^2 + x + 1$

22. Sume 1 a cada respuesta del problema 21. ¿Estas funciones también son soluciones para el problema 21? Explique.